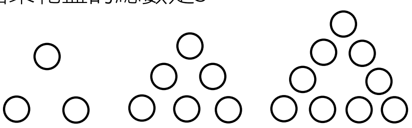
數列趣味及其規律探尋

文・楊丕忠

我們知道，按照一定順序排列的一列數就叫數列。其一般形式寫為a_1，a_2，a_3…，a_n，……，或者數例$\{a_n\}$。由項數n=1，2，3…對應的那一列數a_1，a_2，a_3…，a_n，……；有何規律呈現，有否一般性結論，往往讓我們感到很有興趣，或者說那就是我們想要追究探索的地方。顯然，這樣的探索對培養學生的觀察能力，分析能力，理性抽象綜合能力，皆不無裨益。我僅於以下做一些個例分析。

1、從趣味性說起

例1、 下列每個圖是由若干盆花組成的形如△的圖案，每條邊(包括兩個頂點)有n(n>1)盆花，每個圖案花盆的總數是S。



則 s 與 n 的關係式是＿＿＿＿＿＿＿。

解： 這是一道比較簡單的趣味題，可以幫助我們確定尋找有規律的一些切入點，從而解題。

方法(一)：切入點取△順序數。

△順序數	1	2	3	……	K
花盆總數	3	6	9	……	S

顯然，　$S = 3K$

由於△順序數與△每條邊的盆花數n有如下對應關係

△順序數	1	2	3	……	K
△邊盆花數	2	3	4	……	n

$\therefore K = n-1$

$\therefore S = 3(n-1)$

(嚴格來說，S=3(n-1)要經過數學歸納法的證明才能認可，此處我們省略了，以下皆同)。

方法(二)：切入點取每條邊的花盆數。

每條邊花盆數	2	3	4	……	n
花盆總數	3	6	9	……	s

相應的花盆總數與每條邊花盆數的差構成一等差數列：1，3，5……

就是　$S-n=a_K= a_1+(K-1)d=1+(K-1)\times2$

$=2K-1\ (K=1,2,3,\ldots)$

由於已知條件n從2開始，$\therefore n=K+1$，$K=n-1$

故　$S-n=2(n-1)-1=2n-3$

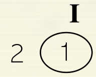
$\therefore S=3n-3$。

$$= 2\cdot\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$
$=n^2-n$

故$a_n=n^2-n+2$，即 $f(n)=n^2-n+2$。

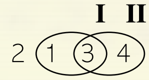
例2、 平面上有n個圓，其中每兩個圓都相交於兩點，每三個圓無公共點，它們將平面分成f(n)塊區域，如f(1)=2，f(2)=4，等等，則f(n)的表達式為 ______________。

解： 切入點取每增加1個圓可以增加的區域。

當 n=1 時，如圖 

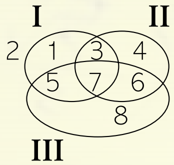
分成區域1，2

$\therefore f(1) = 2$

當 n=2時，如圖 

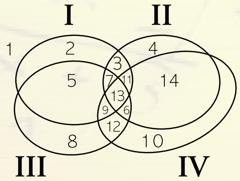
由於增加圓**II**相對圓**I**增加了兩個區域3，4。其中3是圓**I**與圓**II**的公共部分，4是圓**II**的部分。

$\therefore f(2)=2+2=4$

當n=3時，如圖 

由於增加圓**III**，相對圓**I**增加了兩個區域5，6；相對圓**II**增加了兩個區域7，8。

$\therefore f(3) =4+4=8$

當 n=4時，如圖 

相仿

以上由於增加圓**IV**相對增加了區域9，10；11，12；13，14。

$f(4) =8+6=14$

依此類推，有f(5)=14+8=22，等等。

那麼，區域數2，4，8，14，22...構成一個二階等差數列：

$a_2-a_1=2=2\times1$

$a_3-a_2=4=2\times2$

$a_4-a_3=6=2\times3$

$a_5-a_4=8=2\times4$

......

$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$

各式相加得$a_n-a_1=2[1+2+3...+(n-1)]$

2. 從數字規律上尋求

例3、(2003年，中國台灣各大學入學試題)
求$1\cdot99+2\cdot98+...+49\cdot51+50\cdot50$的值

解： 兩數相乘，被乘數由1開始逐步大1即為n，乘數由99開始逐步小1即(100-n)，所以一般式為：

$n(100-n)=-n^2+100n$

那麼，當 n=1，2，3...50時得

$1\cdot99 = -1^2+100\cdot1$

$2\cdot98 = -2^2+100\cdot2$

......

$50\cdot50 = -50^2+100\cdot50$

各式相加得

$1\cdot99+2\cdot98+...+50\cdot50 = -(1^2+2^2+3^2...50^2)+100(1+2+3+...+50)$

$= -\frac{1}{6}\cdot50\cdot51\cdot101+100\cdot\frac{1}{2}(1+50)\cdot50$

$= -42925+127500 = 84575$

(注意這裡用了兩個求和公式：

$1+2+3+...+n=\frac{1}{6}(1+n)n$

$1^2+2^2+3^2+...n^2=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)(2n+1)$)

3. 以函數形式出現的問題。

例4、(2004年暨南大學、華僑大學入學試題)

若函數 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$，且$f(1)=2$，則$\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(2)}{f(1)}+...+\frac{f(101)}{f(100)}=$ ________。

解： 由於函數$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$，$a\in R$，$b\in R$。結合本題要求，這 a，b為取1開始的整數。注意a，b取整的靈活性與順序有：

$\therefore f(1)=2=2^1$

取a=1，b=1，$f(1+1)=f(1)f(1)$

$\therefore f(2)=2\cdot2=4=2^2$

取a=2，b=1，$\therefore f(2+1)=f(2)\cdot f(1)$

$\therefore f(3)=4\cdot 2=8=2^3$

取a=2，b=2， $\therefore f(2+2)=f(2)\cdot f(2)$

$\therefore f(4)=4\cdot 4=16=2^4$

取a=3，b=2， $\therefore f(3+2)=f(3)f(2)$

$\therefore f(5)=8\cdot 4=32=2^5$

依此類推有 $f(100)=2^{100}$

$f(101)=2^{101}$

故原式 $=\frac{2^2}{2^1}+\frac{2^3}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{2^{101}}{2^{100}}=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{100個}=200$

4. 以遞歸數列形式出現的問題。

數列$\{a_n\}$的相鄰幾項的關係式稱為遞歸式。其一般形式是 $a_n=f(a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_{n-k})$ $(n>k)$ ◎

其中a_{n-1}，a_{n-2}，…，a_{n-k} 指 a_n 的相鄰項。我們稱◎式為K階遞歸關係。

要知道許多數列都是通過遞歸公式給出的，而通過遞歸公式來求遞歸數列的通項公式恰是我們探求數列規律的重要方法之一。

例5、（中國16屆希望杯。2005年）

在數列$\{a_n\}$中，$a_1=1$， $a_2=2$，且$a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$ $(n\in N^n)$，則 $a_{2005}=$

A、1　　B、2　　C、3　　D、2005

解： 取n=1，$\therefore a_1\cdot a_2\cdot a_3=a_1+a_2+a_3$

$\therefore 1\cdot 2\cdot a_3=1+2+a_3$， $\therefore a_3=3$

取n=2，$\therefore a_2\cdot a_3\cdot a_4=a_2+a_3+a_4$

$\therefore 2\cdot 3\cdot a_4=2+3+a_4$， $\therefore a_4=1$

取n=3，$\therefore a_3\cdot a_4\cdot a_5=a_3+a_4+a_5$

$\therefore 3\cdot 1\cdot a_5=3+1+a_5$ $\therefore a_5=2$

取n=4，$\therefore a_4\cdot a_5\cdot a_6=a_4+a_5+a_6$

$\therefore 1\cdot 2\cdot a_6=1+2+a_6$ $\therefore a_6=3$

依此類推取值，n從開始的每取3個數字，a_n的數值週期出現：1、2、3。且2005÷3=668餘1，這告訴我們2005中出現了668個“每取3個數字”之後又是第1個數字，故 $a_{2005}=a_1=1$

例5、（中國14屆希望杯，2003年）

設 $f_1(x)=\frac{2}{x+1}$，而$f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$，$n\in N^n$，

記 $a_n=\frac{f_n(2)-1}{f_n(2)+2}$，則 $a_{99}=$ ______。

解： 取 x=2， $\therefore f_1(2)=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$

$\therefore$，取n=1， $a_1=\frac{f_1(2)-1}{f_1(2)+2}=\frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}+1}=-\frac{1}{8}$

此時，$f_2(2)=f_1[f_1(2)]=f_1(\frac{2}{3})=\frac{2}{\frac{2}{3}+1}=\frac{6}{5}$

$\therefore$，取n=2時，$a_2=\frac{f_2(2)-1}{f_2(2)+2}=\frac{\frac{6}{5}-1}{\frac{6}{5}+2}=-\frac{1}{16}$

此時，$f_3(2)=f_1[f_2(2)]=f_1\left[\frac{6}{5}\right]=\frac{2}{\frac{6}{5}+1}=\frac{10}{11}$

$\therefore$，取n=3時，$a_3=\frac{f_3(2)-1}{f_3(2)+2}=\frac{\frac{10}{11}-1}{\frac{10}{11}+2}=-\frac{1}{32}$

此時 $f_4(2)=f_1[f_3(2)]=f_1(\frac{10}{11})=\frac{1}{\frac{10}{11}+1}=\frac{22}{21}$

$\therefore$，取n=4時，$a_4=\frac{f_4(2)-1}{f_4(2)+2}=\frac{\frac{22}{21}-1}{\frac{22}{21}+2}=\frac{1}{64}$

依此類推取值，得到a_1，a_2，a_3，a_4…的數值為

$-\frac{2}{3}$，$\frac{1}{16}$，$-\frac{1}{32}$，$\frac{1}{64}$，…

顯然， $a_n=(-1)^n\frac{1}{2^{n+2}}$

$\therefore a_{99}=(-1)^{99}\frac{1}{2^{101}}=-\frac{1}{2^{101}}$

5. 數列的應用性

例3、 年初某人計劃每月底存入銀行1000元，月息0.165%，分別按單利和複利計算利息，至11月底時年金終值是多少？

（分析：此題是數列在銀行儲蓄中的應用。先要弄清楚幾個概念：

本金：指最初要存入銀行的現金。

本年和(或終值)：指最終結算出來的本金和利息之和的金額。

單利計息：指每期都按初始本金計算利息，當期利息不計入下期本金。

複利計息：指當期利息納入下期本金，即以當期本金和為計息基礎，計算下期利息。)

解：設此人每月底存款，那麼到年底的本利和終值數列為：

(1) 按單利計算：

第1月存款終值為：$Q_1=1000+(1000\times0.165\%)\times11$

第2月存款終值為：$Q_2=1000+(1000\times0.165\%)\times10$

......

第12月存款終值為：

$Q_{12}=1000+(1000\times0.165\%)\times0$

顯然，數列Q_{12}，Q_{11}，...，Q_2，Q_1是公差$d=1000\times0.165\%$的等差數列，那麼由等差數列的前n項和公式可得年底的年金終值為：

$$S=Q_{12}+Q_{11}+Q...+Q_1$$

$$=\frac{[1000+(1000+1000\times0.165\%\times11)]\times12}{2}$$

$$=12108.90(元)$$

(2) 按複利計算

第1月存款終值為：$Q_1=1000\times(1+0.165\%)^{11}$

第2月存款終值為：$Q_2=1000\times(1+0.165\%)^{10}$

......

第12月存款終值為：$Q_2=1000\times(1+0.165\%)^{0}$

顯然數列Q_{12}，Q_{11}，...，Q_1是公比$\phi=1+0.165\%=1.00165$的等比數列，由等比數列的前n項和公式可得年底的年金終值為：

$$S=Q_{12}+Q_{11}+...+Q_1$$

$$=\frac{1000(1-1.00165^{12})}{1-1.0065}$$

$$=12109.50(元)$$

（作者為培華中學教師）

本刊徵稿

1. 投稿需知

若閣下對教育研究、教學工作、教學心得、教學科技應用、教師培訓、教學媒體、教育網址介紹等課題及項目撰著文稿，或創作作品，包括：文藝、攝影、繪畫、書法等，請不必猶疑，投稿宜速。

賜稿字數請勿超過三千，字體務須清晰。若用電腦植字，請提供電子檔。

來稿文責自負，一經本刊採用，即視為作者許可本刊進行複製、發行、信息網絡傳播。

本刊不接受一稿多投，來稿請註明是為首次發表、著作時間，並附真實姓名、任職單位、職稱、通訊地址、聯絡電話、電郵地址。

2. 彩色配圖

若學校或教師持有諸如有關教學工作、師生活動及課堂情景、大自然景色等規格為3R至5R彩照，願意給本刊作為文章配圖發表者，請即與本刊聯絡。本刊將派專人前往接洽。被選載圖片將註明來源，原件或磁碟用畢即送回原處。

來稿請寄：澳門南灣大馬路926號二樓《教師雜誌》辦公室

查詢方式

電郵致：tmag@dsej.gov.mo

查詢電話：(853) 3959138

傳真號碼：(853) 2837 0448