1991-2007年 台灣各大專院校港澳區招生入學試數學科試題(文組)評講與分析

文 · 李偉東

近些年來，海峽兩岸及港澳地區都十分注重在教育領域的合作，兩岸四地聯合舉辦學術交流會，互派考察團與訪問學者，互邀專家講學，還興起了聯合辦學、聯合招生的熱潮。這使得地區之間在高考命題的內容和價值取向上呈現出多元化的局面。

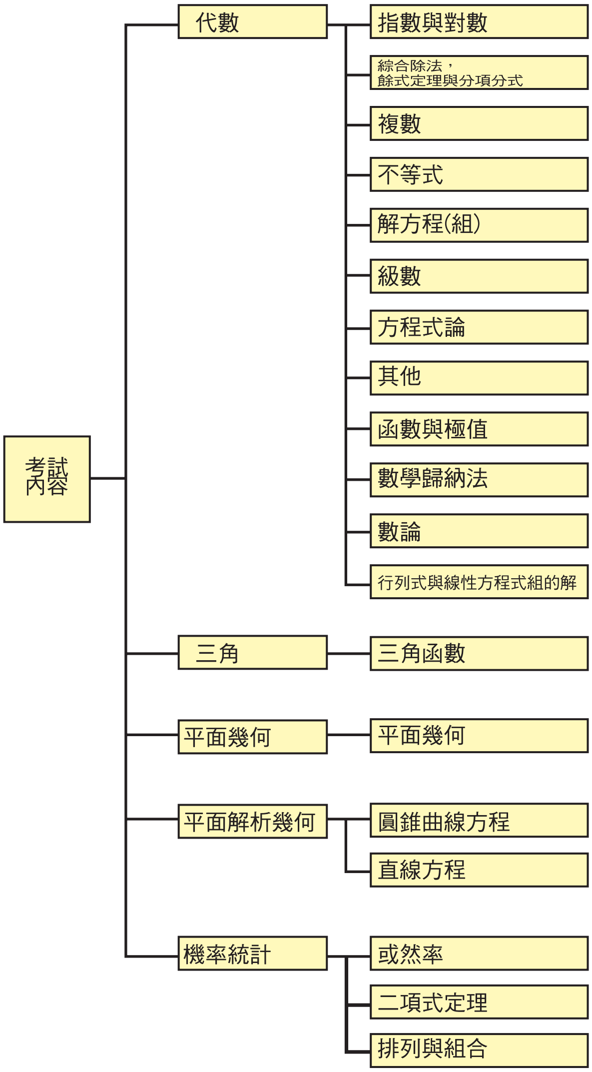
事實上，關於內地高考、澳大考試的研究比較多，但缺乏對台灣聯招的探討，而具體針對台灣聯招試卷的比較研究更是少之又少。針對這種形勢，本文研究了1991－2007年台灣各大學港澳區招生的數學試卷，希望從中得出一些有參考價值的結論。

一、試題內容標準

台灣聯招的數學大綱包含了十九個小知識點，並把它們歸為五大類，分別為代數、三角、平面幾何、平面解析幾何及機率統計，如（圖一）所示。

這種劃分並不是絕對的，在一個考題中，同一個知識面下面的知識點在出題過程中經常有交叉和綜合，也有一些跨知識面綜合的題目。例如：2005年計算第2題，就是圓錐曲線方程，三角函數求最值的綜合。2003年填空第8題，就是不等式，直線方程的綜合。

圖一：考試數學知識點的劃分



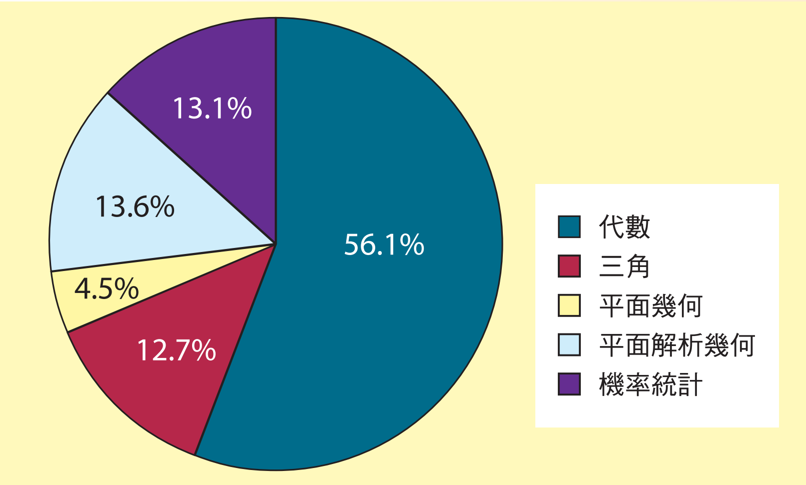
二、試卷結構分析

試卷採用閉卷筆試的形式，全卷滿分100分，考試時間為90分鐘。填空題共有10個題，每題7分，共計70分，解答題共有3個題，每題10分，共計30分。

代數、三角、平面幾何、平面解析幾何和機率統計的百分比與它們在數學課中所佔課時的百分比大致相同，由統計數據得知，其中代數約佔56%，三角約佔13%，平面幾何約佔4%，平面解析幾何約佔14%，機率統計約佔13%，如（圖二）所示。

試題按其難度分為容易題、中等題和難題。難度為0.7以上的題為容易題，難度為0.4至0.7之間的題為中等題，難度為0.2至0.4之間的題為難題，三種試題分值之比約為3：5：2。

圖二：1991-2007年考題知識點分布（一）



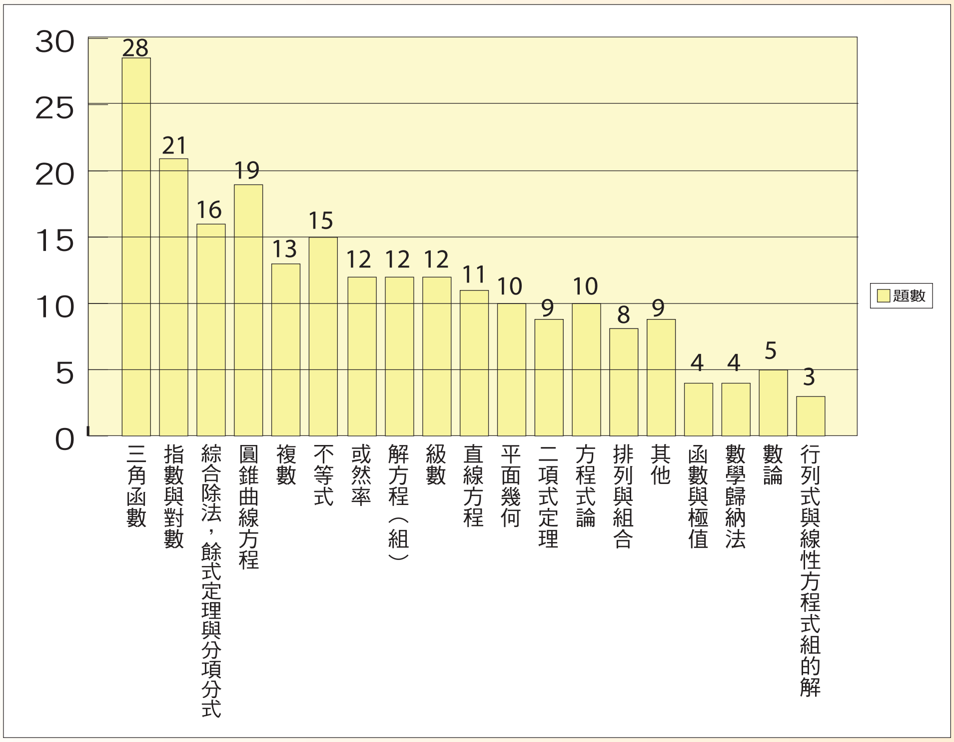
三、1991-2007年試卷分析

從（圖三）中可以看出，試卷主要考查考生的數學基礎知識，其中三角函數、指數與對數、綜合除法、餘式定理與分項分式、圓錐曲線方程佔分最多，而行列式與線性方程組的解題佔分最少。

如（表一）所示，代數部分在歷年考試中都佔有約50%的分值。三角部分幾乎是必考知識點。指數與對數及圓錐曲線方程的分值比較平穩（特別是最近三年）。機率統計部分所佔的分量每年大多有一至兩道題左右。沒有立體幾何、矩陣和微積分的題目。

在1996，2003及2004年試題中，都存在着知識點出現不均勻的現象，因為試題量少（共計13題），一道題的差別就對整體分值有較為顯著的影響。

圖三：1991-2007年考題知識點分布(二)



【表一】：1991-2007年考題題量分布

知識面	知識點	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	總數
代數	指數與對數	2	1	1	2	1	3	2	1	0	1	0	1	1	1	2	1	1	21
	綜合除法，餘式定理與分項分式	1	0	3	1	1	2	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	16
	複數	1	1	2	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	13
	不等式	1	0	0	1	1	0	0	1	0	2	0	1	3	1	1	1	2	15
	解方程（組）	1	1	1	1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	3	0	1	0	12
	級數	0	2	0	0	0	0	1	1	1	0	2	1	1	0	1	1	1	12
	方程式論	1	0	1	1	1	0	1	0	2	0	0	1	1	0	0	1	0	10
	其他	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	1	3	9
	函數與極值	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	4
	數學歸納法	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
	數論	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	0	1	0	5
	行列式與線性方程式組的解	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3
三角	三角函數	2	0	2	1	1	3	2	1	2	2	0	1	3	2	2	2	2	28
平面幾何	平面幾何	1	0	1	1	0	0	0	2	0	0	1	0	0	3	0	1	0	10
平面解析幾何	圓錐曲線方程	1	2	0	0	2	1	1	1	1	1	1	2	0	0	2	2	2	19
	直線方程	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	2	2	0	2	1	0	11
機率統計	或然率	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	12
	二項式定理	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	9
	排列與組合	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	8
	總數	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	221

四、分析三年試卷

2003、2004、2005年這三年的試題，基本上符合教學大綱的要求，注重對考生一般數學能力的考查，主要體現在試題背景為大多數考生所熟悉，對考生其他素質的考查較少。這三年試題特點，歸納如下：

1)保持穩定，突出考查基礎知識的掌握程度

眾所周知，初等數學的基礎知識是考生進入高等學校繼續學習的基礎，也是參加社會實踐的必備知識，考查考生基礎知識的掌握程度，是考試的重要目標之一。考查時，既要注意全面，更注重特出重點，對支撐數學學科知識體系的主幹知識，考查時保證較高的比例並保持必要的深度。

例如，三角函數作為高中數學中最基本、最重要的內容，在2003年試題中，三角函數有3個題，共計24分，考查了三角函數的求值，正弦定理和餘弦定理。在2004年試題中，三角函數有2個題，共計17分，考查了三角公式的應用，三角方程的通解。在2005年試題中，三角函數有2個題，共計14分，考查了三角函數的最值，反三角函數的基本概念。

2)強化知識體系，從學科整體意義上設計試題

知識的整體性，是切實掌握數學知識的重要標誌，考試命題總是從學科整體意義的高度去考慮問題，以檢驗考生能否形成一個有序的網絡化的知識體系，並從中提取相關的信息，有效地、靈活地解決問題。

例如，2005年填空第1題集多項式、函數、餘式定理等內容為一體，不是堆磊型的所謂系列題，不是知識點與方法的機械堆砌，而是多個知識在交滙點處的有機融合。2005年填空第10題，考查的是數列問題的本質——數列的構成規律出發，以最基本的等比數列為基礎，適當組成某個新的數列，讓考生去探索它的構成規律不同的組合方法，能構造出不同的解題深度和思維層次的試題，以體現出對不同考生的要求。再如，2003年填空第8題，它形式簡潔明瞭，內涵豐富，它涉及絕對值、線性不等式、直線方程等基本知識，並把這些知識融合於一題之內，突出了數學思想方法在探索問題和解決問題的作用。

3)試卷結構逐步均衡，形成貼近教學實際的合理布局

這三年的試卷，全卷的均衡做得還好，試卷長度與考試時間的關係，基本題型與綜合題型的匹配，能力考查深度與教學實際的相關程度等問題，形成較好的布局，發揮試卷的整體效應，題目結構保持不變，填空題、計算題的分值比仍為7：3。試題的表述注意運用考生熟悉的語言和表述方式，簡明直觀，有利於考生的閱讀理解，試題背景的取向注意靠近教材，讓考生處於一個較為平和，熟悉的環境中，增強解題信心，同時，控制計算量，避免繁瑣運算，一些貌似有較長運算過程的試題，都有不同的解題層次，以保證考生有較多的時間和精力去答計算題。

例如，2005年填空第5題，以複數為載體，求滿足條件的圖形的方程。本題可利用複數的模的定義，化簡等式從而求得方程。亦可由複數的模的幾何意義，結合解析幾何上橢圓的概念，快速地求得答案。

五、典型難題分析

題目一：1992年計算第3題

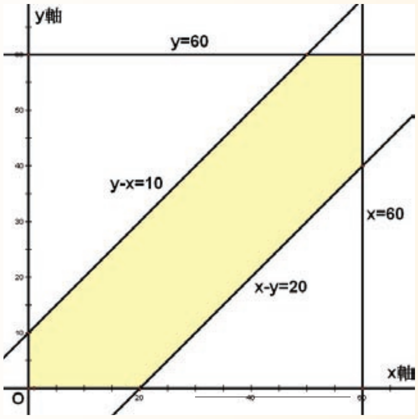
某男生與女友相約下午七時到八時在公園門口見面，約定男生先到應等候廿分鐘，若女生先到只等十分鐘，求二人相遇的機率。

分析：這是一道幾何概型的題目。在幾何區域D中隨機地選取一點，記事件“該點落在其內部一個區域d內”為事件A，則事件A發生的概率P(A)=d / D。其中d，D分別為區域d和區域D也分別記它們的面積。

解：設女生到達時間為7時x分，男生到達時間為7時y分。

那麼，$\begin{cases} x-y \le 20 \\ y-x \le 10 \\ 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{cases}$

作出以上不等式組所表示的平面區域（如圖所示）。



所以，二人相遇的機會=$\dfrac{\text{陰影部分面積}}{\text{正方形面積}}$

$$=\frac{60^2-\frac{1}{2}40^2-\frac{1}{2}50^2}{60^2}$$

$$=\frac{31}{72}$$

題目二：1993年填空第5題

設 $w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

則 $(1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4)=$____

分析：這道題看似是一般的複數三角形式的運算，但是着手處理時就會發現是很棘手的。以下提供一個解題方法：

解：

$\because w^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

$\therefore w^5-1=0$

即 $(w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)=0$

$\because w\neq 1$

$\therefore w^4+w^3+w^2+w+1=0$

又 $w^7=w^2$

$$\begin{aligned}\therefore (1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4)&=(1+w+w^2+w^3)(1+w^3+w^4+w^7)\\&=(-w^4)(1+w^3+w^4+w^2)\\&=(-w^4)(-w)\\&=1\end{aligned}$$

題目三：2002年計算第2題

設$\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$為方程式$x^6-x^5+x^4-2x^3+23x^2-25x-25=0$的一個根，試求此方程式的所有實根。$(i=\sqrt{-1})$

分析：這道題目從表述上可以看出是一道涉及多個知識點的綜合性題目。下面提供一種解題思路：

解：$\because \sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$ 為方程一根

$\therefore \sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$ 也為方程的根

令 $f(x)=x^6-x^5+x^4-2x^3+23x^2-25x-25$

則 $f(x)$ 有因式 $[x-(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)][x-(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)]=x^2-2\sqrt{2}x+5$

$\because f(x)$ 為有理系數多項式

$\therefore f(x)$ 也有因式 $x^2+2\sqrt{2}x+5$

即 $f(x)$ 有因式$(x^2-2\sqrt{2}x+5)(x^2+2\sqrt{2}x+5)=x^4+2x^2+25$

用x^4+2x^2+25 除 $x^6-x^5+x^4-2x^3+23x^2-25x-25$

得x^2-x-1

$\therefore$原方程式即 $(x^4+2x^2+25)(x^2-x-1)=0$

$$x^2-x-1=0$$

$$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

六、對中學數學教學的啟示

1)重示教材的基礎作用，“以本為本”

數學教材是學習數學基礎知識，形成基本技能的“藍本”，能力是在知識傳授和學習過程中得到培養和發展的。縱觀這三年的數學試卷，相當數量的基本題源於教材，即使是綜合題也是基礎知識的組合、加工和發展，充分表現出教材的基礎作用。複習階段要在掌握教材的基礎上，把各個局部知識按照一定的觀點和方法組織成整體，形成知識體系。要注重知識過程中的教學，特別是數學定理，公式的推導過程和例題的求解過程，基本數學思想和數學方法是在這個過程中形成和發展的，數學能力也是在這個過程中形成和發展的，數學能力也是在這個過程中得到培養和鍛鍊的，這就是教材的示範效應，要充分予以重視。

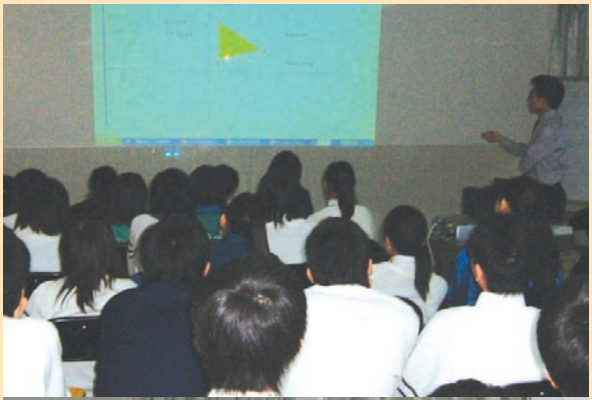
2)重視對數學問題實質性的認識和知識之間的內在聯繫

2004年計算第2題（實為證明題），可以稱之為經典之作，大三角形的垂心與小三角形的內心看起來似乎毫無關係，但垂心會聯想到直角，內心又恰恰蘊含着角平分線，從而想到四點共圓，為證明打下結實基礎，但相當多考生沒有認識到這種實質性的東西，導至該題成了很多考生的“滑鐵盧”。

3)重視閱讀，理解和表述能力的培養

語言是思維的載體，是思維的外部表現形式，熟悉數學語言，包括文字語言，符號語言，邏輯語言，圖形語言和數表，是閱讀、理解和表述數學問題的基礎，只有具備熟練的表述能力，才能有效地進行數學交流，在教學中要重視對學生口頭上和書面表達能力的培養，力求表述的準確性、邏輯性、完整性和流暢性。

（作者為聖若瑟教區中學第五校中文部教師）



【參考資料】

王林全（2006）*當代中小學數學課程發展*。廣州市：廣東教育出版社。

史甯中（2007）。新中國成立以來我國中小數學教育發展之分析。*河澳門數學教育，4*，3-11。

田萬海（1993）。*數學教育學*。杭州市：浙江教育出版社。

杜務（2007）。*2008年高考總複習四輪複習法詳解手冊：數學*。延吉市：延邊大學出版社。

張景中、曹培生（2005）。*從數學教育到教育數學：張景中院士、曹培生教授獻給中學師生的禮物*。北京市：中國少年兒童少年出版社。

陳明哲（1956）。*標準高等代數學*。台北市：中央出版社。

綦春霞、陳立雪（2007）。澳門、內地、中國台灣三地高考數學試卷的比較研究。*教師雜誌，16*，42-51。

戴再平（2002）。*開放題：數學教學的新模式*。上海市：上海教育出版社。