關於函數單調區間求法的教學處理

文・魏澤夫

在學習了函數的單調性概念之後，如何用定義求函數的單調區間就成為教學中的一個難點。本文以函數 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 為例，分析學生在解題當中存在的困惑，並給出教學處理方法。

解：依題$x\neq0$，故分別在區間（0，+∞）及（-∞，0）上討論。

任取x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，則 $x_1-x_2<0$，並且

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)$$

$$=x_1-x_2+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}，$$

（1）當 x_1，$x_2\in(0,1)$ 時，$0<x_1x_2<1$，
而 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即
$f(x_1)>f(x_2)$，
∴ $f(x)$ 在區間（0，1）上是減函數。

（2）當x_1，$x_2\in(1,+\infty)$ 時，$x_1x_2>1$，
而 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即
$f(x_1)<f(x_2)$，
∴ $f(x)$在區間（1，+∞）上是增函數。

（3）當x_1，$x_2\in(-1,0)$ 時，$0<x_1x_2<1$，
而 $x_1-x_2<0$，故$f(x_1)-f(x_2)>0$，即
$f(x_1)>f(x_2)$，
∴ $f(x)$在區間(-1，0)上是減函數。

（4）當x_1，$x_2\in(-\infty,-1)$ 時，$x_1x_2>1$，
而 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即
$f(x_1)<f(x_2)$，
∴ $f(x)$ 在區間（-∞，-1）上是增函數。

綜上，函數 $f(x)$的遞增區間是（-∞，-1），（1，+∞）；遞減區間是（-1，0），（0，1）。

學生對此種解法產生的困惑是：為什麼由 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$就可以斷定$f(x)$單調區間的分界點一定是$x=\pm1$？這裡是否存在著必然的規律呢？

對於學生產生的困惑，可以採取如下的方法解釋：

由於$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$，因此當$x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$ 且$x_1<x_2$時，$f(x_1)-f(x_2)$的符號僅與x_1x_2-1的符號有關，設$x_2=x_1+d$，則$d>0$，故

$x_1 x_2-1=x_1(x_1+d)-1$，若要 $x_1 x_2-1>0$，只需 $x_1(x_1+d)-1>0$即可，因為明顯有 $x_1(x_1+d)-1>x_1^2-1$，故令 $x_1^2-1>0$，由此解得 $0<x_1<1$，因此得到函數 $f(x)$ 的一個單調區間是（0，1），另一個單調區間是（1，+∞）；同理可斷定函數 $f(x)$ 的另外兩個單調區間分別是（-∞，-1）和（-1，0）。所以函數 $f(x)$ 單調區間的分界點是 $x=\pm1$。

由此可以得出用定義求函數單調區間的規律是：首先將 $f(x_1)-f(x_2)$ 分解因式，對於符號不確定的因式，只須令因式中 $x_1=x_2$ 且令此因式為零，解得方程的根就是函數 $f(x)$ 單調區間的分界點。

實際上，隨著學生學習知識的不斷增加，就產生了解決這一問題的新方法。如果學生學習了複合函數的單調性規律和奇函數的概念，就可以用新的方法確定 $f(x)$ 的單調區間，解法如下：

解：當 $x>0$ 時，整理得 $f(x)=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2$，設 $u=v+t$，$v=\sqrt{x}$，$t=\frac{-1}{v}$，$y=u^2+2$，因為這四個函數在區間（0，+∞）上均是增函數，故令 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$，解得 $x>1$，由複合函數單調性規律得：$f(x)$ 的單調遞增區間是（1，+∞）；同理，令 $u=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$，解得 $0<x<1$，故 $f(x)$ 的單調遞減區間是（0，1）；

而 $f(x)$ 滿足：對任意 $x\neq0$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函數，因此對任意 x_1，$x_2\in(-1，0)$，且 $x_1<x_2$，則 $-x_1$，$-x_2\in(0，1)$，且 $-x_1>-x_2$，由於已證得 $f(x)$ 在區間（0，1）上是減函數，故 $f(-x_1)<f(-x_2)$，又 $f(x)$ 是奇函數，故 $-f(x_1)<-f(x_2)$，整理得 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在區間（-1，0）上是減函數；同理可求得 $f(x)$ 在區間（-∞，-1）上是增函數。

綜上，函數 $f(x)$ 的遞增區間是（-∞，-1），（1，+∞）；遞減區間是（-1，0），（0，1）。

當學生學習了導數的知識之後，求函數的單調區間的方法就簡單多了，還以函數 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 為例，求導數得 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$，令 $\frac{x^2-1}{x^2}>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$，令 $\frac{x^2-1}{x^2}<0$，解得 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，因此 $f(x)$ 在區間（-∞，-1）及（1，+∞）上均為增函數；在區間（-1，0）及（0，1）上均為減函數。

所以 $f(x)$ 的單調遞增區間是(-∞，-1)，(1，+∞)；單調遞減區間是（-1，0），（0，1）。

（作者為中學數學特級教師，原任教於吉林省吉林市第一高級中學，現於澳門教育暨青年局任職，本學年參與濠江中學的教學革新工作。）