新課標理念下命題教學的設計方法

文 | 魏澤夫

命題教學是以公理、定理、法則及性質為主要內容的一種重要的教學形式，它通過命題引入、命題證明、命題應用三個階段來培養學生分析問題和解決問題的能力。《高中數學課程標準》指出：“數學課程要努力揭示數學概念、法則、結論的發展過程和本質。要通過典型例子的分析和學生的自主探究活動，使學生理解數學概念、結論逐步形成的過程，體會蘊涵在其中的思想方法，把數學的學術形態轉化為學生易於接受的教育型態。”按照新課標提倡的教學理念，我們在進行命題教學設計時應當思考以下問題：

（1）本節講授的命題與哪些命題有關？它們之間存在著怎樣的抽象關係？
（2）用什麼樣的方式引入命題比較恰當？
（3）如何引導學生探求命題證明的思路？
（4）該命題是否可以用多種方法證明？
（5）如何選擇適當的例題和練習題，促使學生加深對命題的理解？

下面結合教學實踐和觀課情況談一下如何進行命題教學的程序設計。

一、如何進行引入命題的設計？

命題教學的第一步是選擇恰當的方式引入命題，在引入命題時，必須分析已學過的命題A與將要學習的命題B之間可能存在的抽象關係，即：

（1）等值抽象關係：命題A與命題B在邏輯意義上是等價的；
（2）強抽象關係：先學習命題A，後學習命題B，且B是A的特例；
（3）弱抽象關係：先學習命題A，後學習命題B，且A是B的特例；
（4）廣義抽象關係：在推導命題B時用到了A。

因此，如果命題A與命題B是強抽象關係，那麼在學習命題B時適宜採用演繹推理的方式引入，即由命題A直接推出命題B。例如學生學習了兩角和的餘弦公式之後，要學習二倍角公式，就可以由兩角和的餘弦公式直接推出二倍角公式，因為後者是前者的特例。這樣的引入方式簡潔明快，學生在學習了一個一般性結論的基礎上去學習該結論的特例，很容易實現知識的遷移，而且，採用演繹推理的方式引入命題，又往往會直接解決命題的證明問題；

如果命題A與命題B是弱抽象關係，那麼在學習命題B時就適合採用歸納方式引入。例如在學習了全等三角形的性質之後，要學習相似

三角形的相關性質時就可以採用歸納的方式去引入命題；

如果命題A和命題B是等值抽象關係或廣義抽象關係，那麼既可以採取演繹方式引入也可以採用歸納方式引入命題。例如等差數列的性質與等比數列的性質兩者之間就是等值抽象關係。

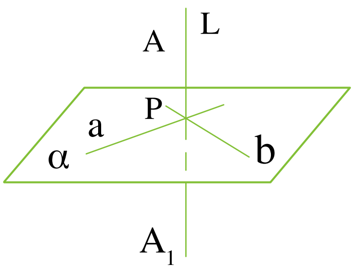
值得注意的是，在學習一個命題時，往往可以首先將此命題還原為一個具體的問題，然後以這個問題引入命題。例如在《複數的三角形式的除法》一課，可以首先與學生研究求$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$的值，在學生利用複數的乘法計算出結果之後，教師指出：計算所得複數的幅角恰為題設二複數的幅角之差，這是偶然的巧合還是必然的結果？應該怎樣進行複數三角形式的除法呢？新課由此展開。

二、如何進行命題證明的程序設計

1. 認真分析命題證明的思路，確定命題證明的難點，找出相應的策略。

例如在《直綫與平面垂直的判定定理》一課，首先應該分析定理證明的難點，這個定理是：若一條直綫與一個平面內的兩條相交直綫垂直，那麼這條直綫垂直於這個平面。即已知：直綫a、b$\subset$平面α，且$a\cap b=P$，直綫$L\perp a$且$L\perp b$.

求證：$L\perp\alpha$.



在這個定理的教學中，證明的難點是：為什麼要在直綫L上找兩個關於點P的對稱點？分析產生難點的原因，教師指出："兩條直綫互相垂直"的實質是呈現軸對稱現象。因此，證明的思路就應該從對稱的角度考慮。

2. 充分揭示蘊涵在命題證明中使用的思想方法。

由於定理、公式、法則是對一類問題抽象和概括的結果，具有一般性，因此證明的方法也必須具有普適性，學生在經歷證明的過程中所領悟的數學思想方法往往要比他們掌握一個結論更有意義。例如在《三角形的內角和定理》一課，教師可以首先引導學生研究特殊情況：證明直角三角形的內角和為180°，使學生發現：只須過三角形的一個銳角的頂點作直角邊的平行綫。然後研究這種方法是否可以應用到一般情形。另外，化歸的方法是很重要的，例如在推導複數三角形式的除法法則時，可以引導學生進行兩次化歸：（1）分母實數化；（2）將分子中的複數化為三角形式，轉化為複數三角形式的乘法運算。

三、如何進行命題應用的程序設計

1. 精選例題，提煉規律，使學生加深對命題的理解。

學習命題的一個主要目標是能夠應用命題解決問題，因此，命題應用是命題教學的一個重要環節。由於命題應用比概念應用更複雜，涉及的因素更多，所以例題的精選是至關重要的。例如在《三角方程》複習課中，可以選擇這樣一道例題：解方程：$\sin^2x+\sqrt{3}\cos x=\frac{7}{4}$。教師可指出：觀察方程特點，應該將$\sin^2x$化為$1-\cos^2x$，得到$\cos^2x-\sqrt{3}\cos x+\frac{3}{4}=0$，即$\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$，故$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$。故所求方程的解集為$\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in Z\right\}$。通過解題分析，教師引導學生研究如何根據題目的結

構特點，將方程與最簡單的三角方程建立聯繫，使學生進一步明確基本的解題思路。

有的教師在《棱臺、圓臺的體積》一課，首先提出例題：求上、下底面邊長分別是3cm和6cm，高為10cm的正四棱臺的體積。在學生解完之後，教師提出：若將題目條件改為正三棱臺，如何求解呢？

這個變式題增加了一些難度，但學生稍加思考，還是容易完成的。緊接著教師又提出：若將題目改為“求上、下底面半徑長分別為3cm和6cm，母綫長為5cm的圓臺體積。”如何求解呢？最後的變式題有一定的綜合性，需要用到圓臺的軸截面性質，有助於提高學生的綜合思維能力。

教師的兩次變式處理，逐步增加題目難度，但又不脫離學生的實際水平，有效地發揮了例題的示範作用。通過這種處理方式，不斷激發學生的學習興趣，加深了學生對所學定理的理解，提高了分析問題和解決問題的能力。

2. 精心設計習題，培養學生運用命題解題的能力。

做練習題是學生鞏固理解所學知識，發展數學能力，培養應用意識和創新精神的主要途徑。為了使學生加深對命題的理解並能正確地運用命題，教師應該精心設計適當、適量的習題，使之緊密結合所學命題，在選題時遵循由淺入深，循序漸進的原則，促進學生從知覺水平的應用，逐步過渡到思維水平的應用。

例如有的教師在《直綫方程的應用》一課，設計了這樣一道練習題：已知直綫L在Y軸上的截距為 -3，且經過點 (-2, 1)，用多種方法求直綫L的方程。這道練習題的難度不大，但設計很有新意，學生容易找到解題思路，但又不一定能發現最簡捷的解法。教師在講評時，提出了一種解法：依題可設所求方程為 $y=kx-3$，將點 (-2, 1) 代入方程可得 $1=-2k-3$，故 $k=-2$，因此所求方程為 $y=-2x-3$，即 $2x+y+3=0$。這種解法將運算量降到了最低點，迴避了分式運算，既加深了對直綫方程形式的理解，同時又簡化了運算過程。

設計練習題必須面向全體學生，體現基礎性、普及性和發展性。為此，練習題的設計要注重層次性，突出題目的差異性和選擇性，既要有基礎性的練習題，又要配置有一定難度的練習題，給學生創設自我提升的空間。例如在《三角方程的

解法》一課，教師應通過設計有一定靈活性的練習題，使學生明確解三角方程的基本思路，滲透化歸思想，提高綜合運用知識的能力。可以提出：解下面的三角方程：

（1）$\cos^2 x=\frac{3}{4}$；

（2）$\sin x+\cos x=0$；

（3）$2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2$。

3. 如何對學生的練習進行點評

在組織學生完成練習之後，教師要認真對學生的解題情況進行點評。在點評時要注意學生是否正確應用了所學習的命題以及出現解題失誤的原因，通過解題分析和解法對比，明確基本解法，幫助學生解決在解題中遇到的困惑。例如在《多項式的因式分解》一課，教師在學生完成：“求x^2+x+1除多項式$x^5+2x^4-x^3+x+1$所得的餘式”之後，與學生交流解題思路的探求過程。教師分析了學生的解法：易知方程$x^2+x+1=0$的根為ω和$\bar{\omega}$，其中$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，

設$f(x)=x^5+2x^4-x^3+x+1$，且

$f(x)=(x^2+x+1)\cdot Q(x)+ax+b$，

則$f(\omega)=a\omega+b$，且$f(\bar{\omega})=a\bar{\omega}+b$. 而$\omega^2=\bar{\omega}$，$\bar{\omega}^2=\omega$，$\omega^3=1$，

$$故\begin{cases} f(\omega)=\bar{\omega}+3\omega \\ f(\bar{\omega})=\omega+3\bar{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\omega+b=\bar{\omega}+3\omega \\ a\bar{\omega}+b=\omega+3\bar{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}，$$

故x^2+x+1除多項式$x^5+2x^4-x^3+x+1$所得的餘式為$2x-1$。

教師指出：這種解法的巧妙之處在於靈活運用了餘數定理和方程的思想，同時也指出了還可以利用長除法直接求得，對比這兩種解法，基本解法是利用長除法。

通過解題點評，教師提煉了學生在解題中使用的數學思想方法，開闊了學生的思路，明確了基本方法和特殊技巧。這樣的點評，對於鼓勵創新，提高學生的解題能力有著積極的促進作用。

四、如何進行課堂小結的程序設計

在命題教學中，課堂小結也是非常重要的。在觀課中發現，有些教師對課堂小結沒有引起足夠的重視，可能教師覺得：在教學中已經明確了規律與方法，因此沒有再作總結的必要。其實這是一種誤解，因為課堂小結是對學習過程、學習方法的深刻反思，是對全課知識的理性回顧和思想方法的昇華，並且重要的數學思想方法有時是隱形存在的，只有通過總結和反思，才能加深理解。

一般說來，命題教學的課堂小結應該從以下三個方面進行：

（1）知識方面：概括總結所學命題，適當簡化命題，指出重點內容；

（2）方法方面：總結在命題學習中所涉及到的證明方法與思想方法；

（3）規律方面：總結在應用命題解題當中隱含的一般規律。

例如在《最簡單三角方程的解集》一課，教師可以引導學生進行如下總結：

（1）知識：學習了四個最簡單的三角方程的解集，要理解並且熟記三個方程 $\sin x=a$、$\cos x=a$、$\tan x=a$ 的解集；

（2）方法：數形結合、分類討論、化歸；

（3）規律：通過變角、變名、變式，消除差異，化歸為最簡單的三角方程。

綜上所述，在新課標理念下進行命題教學設計時，應該努力做到：

（1）合理引入新命題；（2）充分揭示在命題證明中的思路探求過程；（3）精選例題和習題，通過解題，及時提煉規律與方法。

魏澤夫

中學數學特級教師，原職吉林省吉林市第一高級中學，現任職教育暨青年局，本學年參與濠江中學的教學革新工作。