

# “角的概念”之推廣



教案設計 • 供圖 | 蕭芳 楊春萍

## 一、教學目標

1. 掌握用“旋轉”定義角的概念，理解並掌握“正角”、“負角”、“象限角”、“終邊相同的角”的含義；
2. 掌握所有與 $\alpha$ 角終邊相同的角的表示方法；
3. 從“射線繞著其端點旋轉而形成角”的動態過程，培養學生用運動變化觀點審視事物，從而深刻理解推廣後的角的概念；
4. 通過對“任意角”的學習研究，逐步培養學生觀察、歸納、猜想等思維品質。

## 二、教材分析

### 1. 知識結構

“角的概念的推廣”把角的範圍從 $(0^\circ, 360^\circ]$ 擴充到任意角，使角有正角、負角、零角之分；同時在直角坐標系內討論角，有了象限角和非象限角的概念、終邊相同的角的表示法等等。

### 2. 重點、難點分析

教學重點是任意角的概念和象限角的概念；

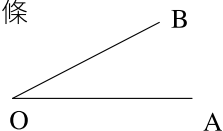
教學難點是終邊相同的角用集合和符號語言正確地表示出來。

- (1) 理解角的概念。會在平面內建立適當的坐標系，通過數形結合來認識角的幾何表示；能在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 範圍內找出與此範圍外每一個已知角終邊相同的角，並判定它為第幾象限角，這些是教學的重點。
- (2) 雖然在數列的學習中曾接觸過不完全歸納法，但對於學生來說仍然不熟悉；在推導過程中，需要學生有一定的觀察分析與猜想能力，所以終邊相同的角用集合和符號語言正確地表示出來是難點。

## 三、教學過程

### (一) 複習問題引入

1. 初中角的定義是怎樣的？範圍？  
從一個點出發引出的兩條射線構成的幾何圖形
2. 銳角的定義是？



- 到目前，學過的最大角是甚麼？
- 在體育節目中，如跳水、體操、冰上芭蕾舞等，常聽到“轉體兩周半”，這些述語如何用數學符號表示？（提出問題）

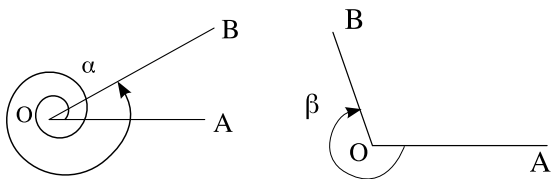
## （二）主題問題

### 主題一：角的概念

引入：

- 時鐘，時針是不是圍繞著一個旋轉中心在不停地旋轉？
- 一條射線，它有幾個端點？

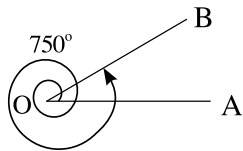
角的概念：一條射線由原來的位置OA，繞著它的端點O按逆時針（或順時針）方向旋轉到另一位置OB，就形成角 $\alpha$ 。旋轉開始時的射線OA叫做角 $\alpha$ 的始邊，旋轉終止的射線OB叫做角 $\alpha$ 的終邊，射線的端點O叫做角 $\alpha$ 的頂點。（著重：旋轉、頂點、始邊、終邊）如圖：



規定：按逆時針旋轉的叫正角；按順時針旋轉的叫負角；沒有作任何旋轉的叫零角，記為 $\alpha=0^\circ$ 。

750°是如何表示的：

請用類似的圖來表示210°、-150°？



總結：

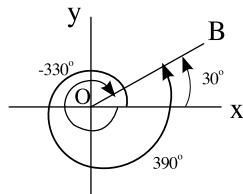
- 角有正負之分。如：210°、-150°、660°；
- 角可以任意大小。實例：體操動作旋轉2周（ $360^\circ \times 2 = 720^\circ$ ），3周（ $360^\circ \times 3 = 1080^\circ$ ）
- 零角。一條射線，沒有旋轉。

### 主題二：象限角

我們常將直線、拋物線這些幾何圖形放在直角

坐標系中討論。如何用直角坐標系內討論角？

如圖：角的頂點與座標原點重合，角的始邊與x軸的正半軸重合。如30°、390°、-330°。這



三個角的終邊落在第一象限，我們就說這幾個角是第一象限的角。由此，若角的終邊在第幾象限，我們就說這個角是第幾象限角。如：

- 120°，第二象限角；
- 210°，第三象限角；
- 45°，第四象限角。

思考：

請學生分別舉出第一、二、三、四象限的角各兩例？

師：若角的終邊落在坐標軸上，如0°、90°、180°、270°，這些角該叫甚麼名字？（終邊在坐標軸上的角……引出非象限角）

### 主題三：終邊相同的角

師：觀察30°、390°、-330°角，它們的終邊在第幾象限？終邊相同？

師：探究終邊相同的角都可以表示成一個0°到360°的角（周內角）與幾個周角的和，例如：

$$\begin{aligned} 30^\circ &= 30^\circ + 0 \times 360^\circ \\ 390^\circ &= 30^\circ + 360^\circ \\ -330^\circ &= 30^\circ - 360^\circ \end{aligned}$$

（提示：對於任意一個角，若其終邊與30°相同，那麼它們之間都相差360°的整數倍）

師：歸納，所有與30°角終邊相同的角的集合為？

$$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

師：由此推出（猜想），所有與角 $\alpha$ 終邊相同的角，可構成一個集合？

$$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$$

例1. 在0°到360°範圍內，找出與下列各角終邊相



同的角，並判斷它們是第幾象限的角。

(1)  $640^\circ$ ; (2)  $-950^\circ$

例2. 寫出終邊在y軸上角的集合。

### (三) 學生活動問題

- 銳角是第幾象限的角？第一象限的角是否都是銳角？小於 $90^\circ$ 的角是銳角嗎？
- 判斷下列命題是否正確，並說明理由：
  - 第一象限的角一定不是負角
  - 第二象限角一定是鈍角
  - 第四象限角一定是負角
  - 若  $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )，則  $\alpha$  與  $\beta$  終邊相同
- 時針從12點到下午3點，時針轉了多少度？
- 已知角的頂點與坐標系原點重合，始邊落在x軸的正半軸上，作出下列各角，並指出它們是哪個象限的角？
 

(1)  $420^\circ$ ; (2)  $-75^\circ$ ; (3)  $855^\circ$ ; (4)  $-510^\circ$ 。
- 寫出終邊在x軸上角的集合。

### (四) 學習回饋

師：請各小組組長彙報一下你們組的答題情況。  
(做對的給予鼓勵，做錯的給予尊重，並幫助分析錯誤的原因。)

### (五) 作業

時間	內容	完成情況
2009/1/14	P7.3 (3) (4)	ok
2009/1/15	P8.1 (3) (6)	ok
2009/1/16	P8.2	不太好，有些同學失去了部分答案；有些同學解題過程不嚴謹，需要再次評講。

## 四、評析

以上教學內容在高一甲進行，花時兩節半。本課的教學設計，是從“對話”的精神與理念入手。首先是教師與教材的對話，找出文本的主線：知識結構、重點與難點，從而設立教學的目標。接下來的是問題環境的創設。在對話教學中，問題是對話的焦點。好的問題可以刺激思考，透過提問能引起學生積極的思考。

### 1. 注重問題情境設計

將學生學習活動與學生本身的知識結構、生活世界相連。本課先設計複習問題的引入，提出需要解決的初始問題和步步深入的後續問題，讓學生在電腦、老師的幫助下，交流回饋、理解鞏固等活動進行自主學習，探索解決問題的辦法；最後設計活動問題，其目的是讓學生在

小組內討論、交流，提高學生應用知識解決問題的能力和學習數學的興趣。

## 2. 注重協作學習環境設計

每個小組的學生，既有電腦提供初始問題，又有學生之間協商交流，必要時還有教師的介入，三者相輔相成。學生在知識、技能、情感、合作意識等方面達到了同步發展。學生分小組進行討論，對於學生在討論過程中的表現，教師適時作出恰如其分的評價，激勵學生積極參與合作學習。

## 3. 教學互動

表1：教學對話（例1. 在 $0^\circ$ 到 $360^\circ$ 範圍內，找出與下列各角終邊相同的角，並判斷它們是第幾象限的角。(1) $640^\circ$ ；(2) $-950^\circ$ ）

### 分析 $640^\circ$ ：

師：任意一個角都可表示為一個周內角加上 $360^\circ$ 的整數倍，那麼 $640^\circ$ 是 $360^\circ$ 的幾倍？

生： $640$ 除以 $360$ ，商為 $1$ ，餘數為 $280$ 。即  
 $640^\circ = 360^\circ + 280^\circ$

### 分析 $-950^\circ$ ：

師：可是 $-950^\circ$ 是一負角，它又是 $360^\circ$ 的幾倍？

生： $-950$ 除以 $360$ 商為 $-2$ ，餘數為 $-230$ 。  
 即  $-950^\circ = -2 \cdot 360^\circ - 230^\circ$

師： $-230^\circ$ 是周內角？

生：不是

師：探究與 $-230^\circ$ 終邊相同的最小正角是？

生： $130^\circ$ ，即  $360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$

生：明白了，

$$\begin{aligned} -950^\circ &= -2 \cdot 360^\circ - 230^\circ = -2 \cdot 360^\circ - 230^\circ \\ &+ 360^\circ - 360^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 130^\circ \end{aligned}$$

解題過程在教材第5頁

在上面的對話中，老師引出問題，引導學生思考，一步一步追問下去，產生有創意的解題方法——豎式法。

表2：教學對話（例2. 寫出終邊在y軸上角的集合）

師： $\{\text{奇數}\} \cup \{\text{偶數}\} = ?$

生： $\{\text{整數}\}$

師：y軸上周內角？

生： $90^\circ$ 與 $270^\circ$

師：所有與 $90^\circ$ 角終邊相同的角的集合？

生： $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

師：所有與 $270^\circ$ 角終邊相同的角的集合？

生： $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

師： $\alpha = k \cdot 360^\circ + 90^\circ = 2k \cdot 180^\circ + 90^\circ$

生：是

師： $\alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ = 2k \cdot 180^\circ + 180^\circ + 90^\circ$   
 $= (2k+1)180^\circ + 90^\circ$

生：對

師：再看問題

(……)

逆向思維形式發問，引導學生一步一步回頭看，讓學生們在對話交流中思考，在對話中解決問題。

## 4. 教學成效

從師生的對話與生生的對話情景中，很明顯能感覺到學生的學習熱情、學習動機都有不同程度的提升。學生在同老師與學生之間的交流中，認真思考探究，同時能夠及時反省。如剛開始的提問中，同學們都認為“小於 $90^\circ$ 的角是銳角”是正確的，在學習之後，能夠指出它是一個錯誤的命題。同時對初中所學的有關知識能夠從靜止到動態的進步，如對角的概念的重新理解。

### 蕭芳

原職澳門坊眾學校，現職濠江中學（氹仔分校）教師

### 楊春萍

原職山東省濰坊一中，中學高級教師，現任職教育暨青年局，曾被派駐澳門坊眾學校，本學年參與粵華中學、澳門工聯職業技術學校的教學革新工作。