2001至2009年度 澳門大學招生入學試 數學科試題（卷A）評講與分析

文 | 李偉東

一、試卷簡介

數學卷A是為報考澳門大學科技學院和教育學院（主修數學）而設，目的在於評核考生的數學能力。試卷採用閉卷筆試的形式，全卷滿分100分，考試時間為120分鐘。試卷共有兩部分：第一部分為必答題，約七至八條題目，須全部作答，共52分；第二部分為選答題，有五條題目，每條16分，任擇三條作答，共48分，如作答多於三題，只有首三題可得分。

《考試大綱》內的數學內容：分別為基礎概念、代數、函數、平面及立體幾何、線性方程組、解析幾何、代數不等式、三角、基本微積分、曲線的描繪、向量、複數、概率和數列與級數。統計近年來澳門大學的試題發現：平面及立體幾何、解析幾何共佔27.2％；代數和三角佔20.7％；基礎概念、函數和向量只佔7.4％。

二、命題原則

1. 概念性強，解法多樣

數學是由概念、命題組成的邏輯系統，而概念是基礎。數學中每一術語、符號和用語都有著明確的內涵。這個特點反映到考試中就要求考生在解題時首先要透徹理解概念的含義。一般數學試題的結果雖確定惟一，但解法卻多種多樣，有利於考生發揮各自的特點，靈活解答，真正顯現其水準，命題時考慮各種等價解法的考查重點和難易大致相同，解答到同樣深度給同樣的分值。例如：

2004 / 2005年度 必答題第2題

2) 設a為正數及$f(x)=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$為偶函數

（即$f(-x)=f(x)$）。

(a) 求數 a 。（4分）

(b) 證明$f(x)$在$\{x : x>0\}$上是增函數。（4分）

【分析】

本題是考查函數知識的一道常規試題，給出的函數式是考生所熟悉的，涉及的解題方法是數學的通性通法，大大減弱其抽象程度，考生容易思考並動手解題，這作為一道中等難度的試題來設計是合適的；試題(b)的證明函數在$\{x: x>0\}$上是增函數，由於高中課程學習了導數，提供了更為簡捷的解題手段，如果考生能用求導的方法來證明本題，能使解題過程更為簡捷且贏得考試時間，是較高的思維層次的表現。

【解】

(a) 由 $f(-x)=f(x)$，得$\frac{e^{-x}}{a}+\frac{a}{e^{-x}}=\frac{e^{x}}{a}+\frac{a}{e^{x}}$，即$e^x(a-\frac{1}{a})-\frac{1}{e^x}(a-\frac{1}{a})=0$，$(a-\frac{1}{a})(e^x-\frac{1}{e^x})=0$。當$x\neq 0$，即 $e^x-\frac{1}{e^x}\neq 0$ 時，$a-\frac{1}{a}=0$；$\therefore a=\pm 1$（負號捨去）

(b)【證法1】

設 $0<x_1<x_2$，則 $f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}-e^{x_2}+\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}=(e^{x_2}-e^{x_1})(\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1)=e^{x_1}(e^{x_2-x_1}-1)\cdot\frac{1-e^{x_2+x_1}}{e^{x_2+x_1}}$

由$x_1>0$，$x_2>0$，$x_2-x_1>0$，得$x_1+x_2>0$，$e^{x_2-x_1}-1>0$，$1-e^{x_2+x_1}<0$。

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x)$在$\{x: x>0\}$上是增函數。

【證法2】

$f'(x)=e^x-e^{-x}$。當$x>0$時，總有$e^x-e^{-x}=e^x-\frac{1}{e^x}>0$。

$\therefore f(x)$在$\{x: x>0\}$上是增函數。

2. 採用成題，以本為本

數學教材是學習數學基礎知識，形成基本技能的藍本，能力是在知識傳授和學習過程中得到培養和發展的。縱觀近年的數學試卷，相當數量的基本題源於教材，即使是綜合題也是基礎知識的組合和加工，充分表現出教材的基礎作用。

複習階段要在掌握教材的基礎上，把各個局部知識按照一定的觀點和方法組織成整體，形成知識體系。要注重知識過程中的教學，特別是數學定理，公式的推導過程和例題的求解過程，基本數學思想方法和數學能力都是在這個過程中形成和發展的，這就是教材的示範效應。統計近年澳門大學試題發現，有很多採用成題考查的例子，例如：

2005 / 2006年度 必答題第4題

4) 用數學歸納法，證明對於n＝1，2，3，…，以下等式成立：

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$ （7分）

此題是1995年台灣各大學院校港澳區招生入學試文科卷計算題第1題；

《文達附加數學》（蘇一方，黃鳴嬋）第71頁複習題3甲部第4題。

2008 / 2009年度 必答題第4(a)小題

4) (a) 用數學歸納法，證明對任意正整數n，

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ （5分）

此題是人民教育出版社《數學Ｉ》第264頁的教學內容；《文達附加數學》（蘇一方，黃鳴嬋）第63頁練習3－2甲部第9題；《標準高等代數學》下冊（陳明哲）第38頁習題六十四第4題。

此題由於限制了只能利用數學歸納法，所以證明的方法是單一的；如果不限制證法，則可以更好的考察考生其他數學能力，例如用演繹方法可給出如下證明：

$$\because \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\therefore \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right]+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$；證明成立。

【分析】

對於數列 $\{a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\}$，其前 n 項和為：

$$S_n=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right];$$

k 為正整數

利用上述公式，可以解決一系列通項為 n 的多項式其倒數的數列的求和問題。

三、試題特點

1. 改編範題，控制難度

考試的目的是為大學選拔新生，但其要求仍要以高中教學為基礎。因此，確定試卷的要求是命題的關鍵。《考試大綱》是考試命題的依據，命題是按照考試大綱的基本要求，並充分考慮澳門地區不同學校使用不同教材的特點，每所學校的學生評量方法和評價機制也不盡相同，最後還要考慮不同考生差別很大的事實；在必答和選答內容中都編排一些較易試題，使大部分考生都得到一定的基本分。同時，亦編排一些有一定難度的試題，實現選拔的目的。

(1) 改變提問方式，把證明題改變為探索題，將結論隱蔽起來，可提高難度。

例如將：中學數學《教材全解》高二代數第 40 頁例 3

已知 a，$b\in R^+$，$a+b=1$，試證明：

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq\frac{25}{4}$$

改編成：2005 / 2006年度 必答題第1題

1) 設 a 及 b 為正數，且 $a+b=1$。

(1) 證明 $ab\leq\frac{1}{4}$。（2分）

(2) 求 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$ 的最小值。（5分）

2) 改變題設條件，適當增刪已知條件，隱蔽條件明朗化，抽象條件具體化，條件參數的變更，都可使試題的難度發生變化。

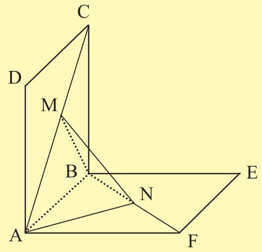
例如將：2002年全國新教材高考題 第18題

如圖，正方形ABCD，ABEF的邊長都是1，而且平面ABCD，ABEF互相垂直。點M在AC上移動，點 N 在BF上移動，若CM=BN= a $(0<a<\sqrt{2})$。

1. 求 MN 的長；

2. 當 a 為何值時，MN 的長最小；

3. 當 MN 長最小時，求面 MNA 與面 MNB 所成的二面角 α 的大小。



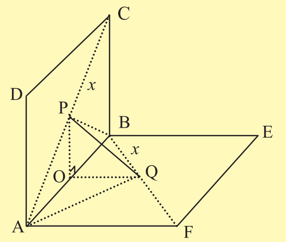
改編成：2007 / 2008年度 選答題第11題

如圖，正方形ABCD和正方形ABEF的邊長均為1，且正方形ABCD垂直於正方形ABEF。設點P和點 Q 分別為線段AC和BF上的動點，且CP = BQ = x，$0<x<\sqrt{2}$。

(a) 設O為點P在AB上的垂足。

(1) 證明∠POQ是一直角。（2分）

(2) 求 PQ 的長(答案以 x 表示)。（7分）



(b) 設 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即P和Q分別為AC和BF的中點。求面APQ與面BPQ所成的二面角。

【提示：設R為PQ的中點，連AR和BR。】（7分）

(3) 改變綜合程度，增減知識點的組合，變換知識和方法的綜合廣度和深度，也會改變試題的難度。

例如：2002年全國新教材高考題

某單位6個員工借助互聯網開展工作，每個員工上網的概率都是0.5（相互獨立）。

1. 求至少3人同時上網的概率；
2. 至少幾人同時上網的概率小於0.3？

改編成：2004 / 2005年度 必答題第7題

一公司有職員六人。每天，各人需要使用電腦的概率為0.5。假設各人對電腦的需要是獨立的，且在任何兩天的需要也是獨立的。

(a) 求在同一天內以下事件的概率：

1. 剛好有三人需要使用電腦；（2分）
2. 最少有三人需要使用電腦。（2分）

(b) 若公司只有五台電腦。求最大的n使得公司在連續n天內都有足夠電腦以供使用的概率大於0.9。（4分）

2. 暗示解題，分散難點

這類試題設計的特點是內容具有一定的深度和廣度，知識點覆蓋面大，考查的能力較高。增加中間的設問，把單問改變為分步設問，無異於給出提示，可調節難度；其作用是給考生留有較大的發揮餘地，優秀的考生得以脫穎而出，各種水準的考生能得到相應的分數，拉開了考生的檔次，有效地區分了考生。例如：

2008 / 2009年度 選答題第11(b)小題

(b) 設 $\omega=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$，其中 k 是不能被7整除的整數。

(1) 證明$\omega^7=1$。由此，證明 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6=0$。（4分）

(2) 用(1)的結果，證明$(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2=5$。（3分）

(3) 用(2)的結果，求$(\cos\frac{2k\pi}{7})^2+(\cos\frac{4k\pi}{7})^2+(\cos\frac{6k\pi}{7})^2$。（4分）

【分析】

此題的難點是(2)、(3)兩個問題，命題者為了使考生發現解題思路，對(2)和(3)的解法作了明確的提示，若按照指引的方向解答，細心分析題意，體會命題者的意圖，設法溝通各小題之間的內在聯繫，注意題目特點，就能快速求解。

【解】

(b)(1) $\omega^7=(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7})^7=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$

由$\omega^7=1$，得 $\omega^7-1=0$，即 $(\omega-1)(\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$

$\because\ \omega\neq1$，$\therefore 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6=0$；證明成立。

(2) $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2$

$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}+\omega^4+\frac{1}{\omega^4}+\omega^6+\frac{1}{\omega^6}+6$

$=\omega^2+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^6+\omega+6$

$=-1+6=5$；證明成立。

(3) $\omega+\omega^{-1}=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}+\cos(-\frac{2k\pi}{7})+i\sin(-\frac{2k\pi}{7})=2\cos\frac{2k\pi}{7}$

同理，$\omega^2+\omega^{-2}=2\cos\frac{4k\pi}{7}$及$\omega^3+\omega^{-3}=2\cos\frac{6k\pi}{7}$

代入$(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2=5$ 得：

$(2\cos\frac{2k\pi}{7})^2+(2\cos\frac{4k\pi}{7})^2+(2\cos\frac{6k\pi}{7})^2=5$

$\therefore\ (\cos\frac{2k\pi}{7})^2+(\cos\frac{4k\pi}{7})^2+(\cos\frac{6k\pi}{7})^2=\frac{5}{4}$

參考樣題：《文達附加數學》（蘇一方，黃鳴嬋）第464頁複習題13乙部第32題

設$\omega=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，其中 $i^2=-1$，且 k 為一已知整數，使 $\omega\neq1$。

(a) 試證對於任意整數n，$\omega^n+\omega^{-n}=2\cos\frac{2nk\pi}{5}$。

(b) 證明 $\omega^5=1$。

由此，或用其他方法，證明 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$。

(c) 利用(b)的結果，試證

$(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2=3$。

(d) 由(a)及(c)，證明

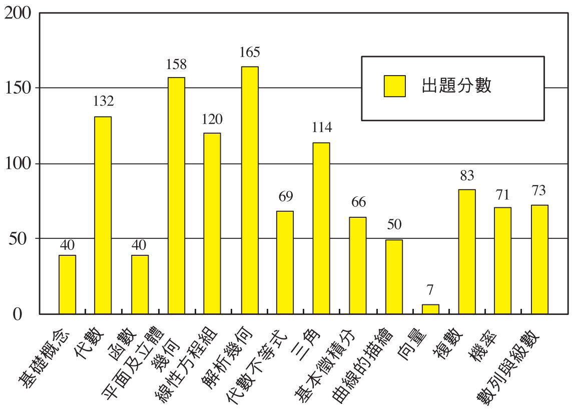
$$(\cos\frac{2k\pi}{5})^2+(\cos\frac{4k\pi}{5})^2=\frac{3}{4}$$

四、命題趨勢

1. 全面綜合考查基礎知識

全面考查了《考試大綱》中各部分的內容，可以說教材中各章的內容都有所涉及，如線性方程組、向量、複數、概率等教學課時較少的內容，在試卷中也有所考查【見表一】[1]。在全面考查的前提下，重點考查了高中數學知識的主幹內容，如平面及立體幾何、解析幾何、代數不等式、三角、數列與級數等仍是支撐整份試卷的主體內容【見圖一】。尤其是在每年試卷的必答題中，每題所涉及的具體內容都是高中數學的重點內容，要求層次恰當，試題淡化特殊的技巧，大多數試題既有常規解法，同時在知識的應用上又有一定的靈活性。

【圖一】 2001至2009年度考題出題分數分佈



代數重點考查了函數的性質、多項式、指數及對數等，解析幾何重點考查了直線和二次曲線的位置關係，立體幾何仍以多面體的有關線面關係和角為考查重點，試卷還考查了基本微積分、曲線的描繪、向量、複數等內容。

按照近五年的考題統計【見表二】，分數分配不平均，在必答題（全卷佔52分）部分，代數、代數不等式、概率、數列與級數佔分比率很高；在選答題（全卷佔48分）部分，平面及立體幾何、線性方程組、解析幾何、基本微積分、曲線的描繪幾乎是每年必考的內容，若這些章節的分數可掌握80%，至少就能達到高標準了。

【表二】 2005至2009年度考題（部分）出題分數統計

考試年度	2005 / 2006	2006 / 2007	2007 / 2008	2008 / 2009	2009 / 2010	總計
必答題						
代數	8	13	0	14	21	56
代數不等式	7	4	14	9	3	37
概率	7	8	8	8	8	39
數列與級數	8	11	8	8	0	35
選答題						
平面及立體幾何	16	16	16	20	18	86
線性方程組	16	16	16	16	0	64
解析幾何	16	16	16	16	16	80
基本微積分 / 曲線的描繪	10	16	16	6	14	62

註：表格中的數位表示出題分數。

2. 突出數學思想方法考查

數學思想方法是對數學知識的最高層次的概括與提煉，是適合於中學數學全部內容的通法，是考試的核心，數學思想和方法的考查分三個層面：首先是具體方法的考查，如配方法、換元法、消去法、割補法、待定係數法、數學歸納法；然後是一般的邏輯方法，如分析法、綜合法、模擬法、歸納法、演繹法、反證法等；最高層次是數學思想，如函數與方程思想、數形結合思想、分類討論思想、轉換與化歸思想、運動與變換思想等。

例如：函數與方程的思想是試卷重點考查的對象，2003 / 2004年度選答題第10題出現的解析幾何題中的曲線方程及韋達定理的應用都是方程思想的最佳體現，又例如2005 / 2006年度選答題第12題的線性方程組題，在消元、轉化後引入函數圖像討論方程組的解，此題還考查了指數函數性質及數形結合的思想。

換元法在考試中常考不衰，如2005 / 2006年度必答題第7題，通過換元處理，把原方程化歸為二次方程根和係數關係求解；2006 / 2007年度選答題第12題，此題設計比較精妙，為帶多個參數的方程組解的討論，但難度不大，考生若按照題目提示，利用換元法簡化方程求解。

轉換與化歸思想是試卷考查的一大重點，如2009 / 2010年度選答題第12題，求解過程需要兩次轉化；其一是無限轉化為有限，即利用錯位相減法對數列進行處理，其二是化歸（拆分）為兩個基本數列求和問題；2007 / 2008年度必答題第5題複數題和2001 / 2002年度必答題第7題數列題，都體現了轉換與化歸思想。

分類討論是一種十分重要的思想方法，如2003 / 2004年度必答題第7題，必須對排列組合的加、乘原理作出討論；2001 / 2002年度必答題第2題，要以指數的底數進行分類討論。此外，在每年考核代數不等式的題目中，都恰如其分的考查綜合法、分析法、歸納法等內容，這裡不作詳述。總之，考試命題考慮從不同的角度運用不同的思想方法，創設不同的解題途徑，從而有效區分不同程度學生的數學能力。

【編按】

1. 由於篇幅所限，表一將於《教師雜誌》網上版刊登，有興趣讀者請登入 http://www.dsej.gov.mo/cre/tmag

【參考書目】

入學考試範圍（2001-2009）。澳門：澳門大學出版中心。

四輪複習法詳解手冊：數學（2004）。延吉市：延邊大學。

高級中學課本：數學 I。北京市：人民教育出版社。

陳明哲（1958）。*標準高等代數學*。台北市：中央。

管俊傑、洪進華（2007）。*會考數學新探索*。香港：香港教育圖書公司。

澳門數學教育研究學會（2010）。*澳門數學教育，7*。

薛金星編（2005）。*中學教材全解：高二數學（上）*。西安市：陝西人民教育出版社。

蘇一芳、黃鳴嬋（2002）。*文達附加數學*。香港：文達。

李偉東

聖若瑟教區中學第五校（中文部）高中部數學科主任。