# 在常規教學中培養學生數學思維能力
## 以“可以被3整除的數”為例

文｜江春蓮　汪甄南

進入廿一世紀，各國進行的數學課程改革都把培養學生的思維能力作為數學教育的目的之一。我國2003年頒佈並試驗的《九年義務教育數學課程標準（試驗稿）》中強調“教師應激發學生的學習積極性，向學生提供充分從事數學活動的機會，幫助他們在自主探索和合作交流的過程中真正理解和掌握基本的數學知識與技能、數學思想和方法，獲得廣泛的數學活動經驗”。新加坡在2000年頒佈的中小學數學教學大綱中，六個數學教育目的中的第三條就是“通過解決數學問題發展邏輯演繹和歸納及清楚表達他們的數學思維和推理技能的能力”（範良火，2003）。如何在常規的教學中，滲透數學課程標準的要求，達到培養學生數學思維能力的目的呢？本文試圖以“可以被3整除的數”一節為例，來探討培養學生思維能力的過程和方法。

### 一、關聯內容

“可以被3整除的數”是小學四年級上學期（汪甄南，2005）第六單元“倍數和因數”的最後一節，前面兩節依次為“認識整除性”和“可以被2、5整除的數”。可以被2整除的數的個位數位是偶數（0，2，4，6，8），可以被5整除的數的個位數位是0或5；但可以被3整除的數的特點卻不同，是各數位上的數位和能被3整除。要培養學生的思維能力，就要引導學生從事相關的探究活動，找出這一規律。在這一探究活動中，學生需要觀察數的排列特點，分析數的特點，得出猜想，檢驗猜想，證明猜想。只有證明了的數學猜想才可以應用，在小學四年級，可以不要求學生證明，但要說明有證明的必要。

## 二、教學過程

### 1. 複習引入

複習能被2、5以及既能被2又能被5整除的數的特點，從而提出是次的課題——能被3整除的數。

### 2. 探究能被3整除的數的特點

〔準備材料：0-99按10x10排列的數表〕

要探究能被3整除的數的規律，我們可以先把0-99內的能被3整除的數都找出來，一共有0=0x3，3=1x3，6=2x3，9=3x3，……，99=3x33（圖1），共34個。

觀察圖1，引導學生探究如下問題：

（a）我們能否得出類似於能被2或5整除的數那樣的結論？〔答案是不能，因為能被3整除的數最後一位數字0-9都有可能。〕

（b）對於能被3整除的數，我們能否考慮最後兩位數字呢？〔答案也是不能，因為能被3整除的數最後兩位數位可以是0-9的任意組合，儘管表中10，11等都不能被3整除，但在他們前面加多一位數就能找到被3整除的數，如在10前面加2得到210，210就能被3整除！〕

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
| 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
| 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 |
| 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |

圖1：1-100之間能被3整除的數

（c）基於前面的兩個問題，學生不難得出，考慮後面位上的數位特點是不成功的！於是可以繼續讓學生觀察圖1數表，這些數呈什麼樣的排列規律。可能有學生説，能被3整除的數排列成一條又一條的斜線！進而可以引導學生觀察位於同一斜線上數的特點。

（d）位於同一斜線上的數 {0}，{3，12，21，30}，{6，15，24，33，42，51，60}，{9，18，27，36，45，54，63，72，81，90}有什麼特點？〔答案：後面一個數的個位數字比前一個數的個位數字少1，但十位數字比前一個數的十位數字多1，所以他們各數位上的數字和是不變的。老師可以順此提示學生，我們是否可以討論各數位上的數字和的規律，這三組數的各數位上的數字和分別為3，6，9，均能被3整除，這樣就形成猜想——能被3整除的數，各數位上的數字和就能被3整除。〕

（e）用圖1中，餘下的能被3整除的數來檢驗形成的猜想。圖1餘下的能被3整除的數各數位上的數字和分別為12，15，18，這些都是3的倍數。

至此，可以得出可以被3整除的數的特點。這一結論是正確的，但在數學上還要證明，這個證明等到大家到中學了，在數學競賽裡面可能會學到。

（f）如果能被3整除的數的特點是各數位上的數字和就能被3整除，那麼各數位上的數字和是3（或6，或9等）的數就應該都能被3整除，可以寫出各數位上的數位和是3的所有3位數嗎？並檢驗他們能否

全被3整除。〔答案：各數位上的數字和是3的所有3位數有111，102，120，201，210，300，他們都能被3整除，因為111＝3x37，102=3x34，120=3x40，201=3x67，210=3x70，300=3x100。各數位上的數字和是6的所有3位數有222，123，132，231，213，312，321，204，240，402，420，105，150，501，510，330，303，114，141，411，600，他們也能被3整除，當然不要求學生寫出這麼多的數。〕

### 3. 運用規律

【例1】檢驗如下的數能否被3整除〔可用數卡顯示給學生〕

405，351，921，599，468，733，9876，1234

〔答案：除599，733，1234外，其他的幾個均能被3整除。進而可以提出問題：對於那些不能被3整除的數，能否只將其中的一個數字加大1或減少1改成能被3整除的數？可以！599改成699，733改成633，或723，或732；1234改成1134，或1224，或1233。〕

【例2】各符號要代表什麼數位，四位元數才可以被3整除？填一填。

| | |
|---|---|
| (a) 21◇5 | ◇＝ ________ |
| (b) 1★24 | ★＝ ________ |
| (c) 33▲6 | ▲＝ ________ |
| (d) 413● | ●＝ ________ |

### 4. 總結和佈置作業

（a）能被3整除的數的特點；（b）我們探究的方法，觀察→形成猜想→檢驗猜想→得出結論。

培養學生的數學思維能力，需要日積月累，所以也只有通過我們教師在常規教學中得以貫徹才能實現。

## 附錄

試證明：可以被3整除的數的特點是各數位上的數字和能被3整除。

證明：假設一個n位數，其從高到低各位上的數字分別為$a_1$，$a_2$，$a_3$，⋯，$a_{n-1}$，$a_n$，則該數可以寫作：$\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$

$$= a_1 x 10^{n-1} + a_2 x 10^{n-2} + a_3 x 10^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x 10 + a_n$$

$$= a_1 x(\underbrace{99\cdots9}_{n-1}+1) + a_2 x(\underbrace{99\cdots9}_{n-2}+1) + a_3 x(\underbrace{99\cdots9}_{n-3}+1) + \cdots + a_{n-1}(\underbrace{9}_{1}+1) + a_n$$

$$= a_1 x(\underbrace{33\cdots3}_{n-1}x3+1) + a_2 x(\underbrace{33\cdots3}_{n-2}x3+1) + a_3 x(\underbrace{33\cdots3}_{n-3}x3+1) + \cdots + a_{n-1}(\underbrace{3}_{1}x3+1) + a_n$$

$$= (a_1 x\underbrace{33\cdots3}_{n-1} + a_2 x\underbrace{33\cdots3}_{n-2} + a_3 x\underbrace{33\cdots3}_{n-3} + \cdots + a_{n-1} x3) x 3 + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

若該數可以被3整除，則$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$就應可以被3整除，反之亦然，證畢。


【參考文獻】

汪甄南主編（2005）。*新思維數學（四上）*。香港：教育出版社。

範良火（2003）。思考的學校，學習的國家：新加坡的數學課程。在孫曉天主編，*數學課程發展的國際視野*（頁305-338）。北京市：高等教育出版社。



**江春蓮**

澳門大學教育學院助理教授。

**汪甄南**

澳門數學教育研究學會會長。