澳門大學2010/2011 入學考試數學（A）分析

文 | 石雷

一、試題及考試大綱分析

許多報考澳門大學的考生都需要參加澳門大學入學考試數學試題（A），而該分試題相對於試題（B）是有一定難度的。熟練掌握教科書上的基本知識和基本技能有助於學生在考試中熟練的處理其中的問題。考察2010/2011學年入學考試試題，我們可以發現考試大綱中的知識點在試題的命制中幾乎全部出現。

表1

題號	考察內容	所佔分值
必答1	代數不等式	8分
必答2	函數性質，反函數	7分
必答3	三角，三角恆等式證明	7分
必答4	線性方程	7分
必答5	數列	8分
必答6	三角，三角恆等式證明	8分
必答7	概率，排列組合	7分
選答8	二項式定理	16分
選答9	立體幾何	16分
選答10	解析幾何	16分
選答11	基本微積分，曲線描繪	16分
選答12	複數，三角	16分

二、部分試題分析

代數不等式幾乎是每年的必考點，由此可見不等式的重要性，不等式的考察可以有效的考察學生在函數、方程（一元二次方程，高次方程）等方面的知識，本題佔總分的8%。在試題中必答題3、必答題6和選答題12都出現了三角，分值分別佔總分的7%、8%和16%。三角問題在解答中需要很多技巧，這說明命題者想通過考察三角問題以檢驗考生在三角技巧方面的能力。我們以下面三個例子進行說明。

例1、（2010/2011學年入學考試試題第1題）

解不等式 $\sqrt{x+5} \le 1+|x|$。

解法一（直接法）：首先由根式的定義得：$x \geq -5$。

$\sqrt{x+5} \le 1+|x|$，

$x+5 \le 1+2|x|+x^2$，

$-x^2+x+4 \le 2|x|$

當 $x \ge 0$ 時，原不等式可以化成 $-x^2+x+4 \le 2x$，即 $x^2+x-4 \ge 0$。解得：$x \ge \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$。

當 $-5 \le x<0$ 時，原不等式可以化為 $-x^2+x+4 \le -2x$，即 $x^2-3x-4 \ge 0$。解得：$-5 \le x \le -1$。

所以原不等式的解為 $-5 \le x \le -1$ 或者 $x \ge \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$。

解法二（圖像法）：先分別作出函數 $y=\sqrt{x+5}$ 和 $y=1+|x|$ 的函數圖像，因為要證明的是 $\sqrt{x+5} \le 1+|x|$，所以只要求出 $y=1+|x|$ 的圖像在 $y=\sqrt{x+5}$ 上面時 x 的取值範圍即可。

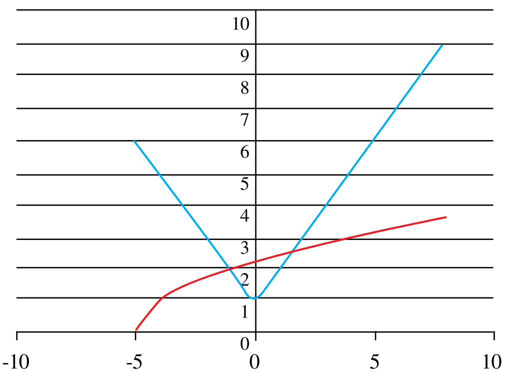

圖1　$z=\sqrt{(x+5)}$　$y=|x|+1$

下面解方程 $\sqrt{x+5}=1+|x|$，因為 $x \geq -5$ 且 $0 \le \sqrt{x+5}=1+|x|$，先兩邊平方得 $-x^2+x+4=2|x|$。所以當 $x \ge 0$ 時，方程為 $x^2+x-4=0$。解得：$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$。當 $-5 \le x<0$ 時，原方程為 $x^2-3x-4=0$。解得：$x=-1$。

結合函數圖像和方程的解，我們可以得出原不等式的解為：$-5 \le x \le -1$ 或者 $x \ge \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$。

評析：本題是給出了一個含有二次根式和絕對值的不等式，首先考慮到是怎樣去掉二次根式和絕對值，化為我們熟悉的不等式，在去掉二次根式時自然要首先考慮到根式的定義，然後用平方法去掉二次根式。而絕對值則在去掉的時候仍要按照定義進行分情況討論。

對於第二種解法，我們知道不等式本身就是函數的應用，自然我們想到是否可以用函數來考察本題，很巧合的是左右兩邊的函數我們都是已知的函數，畫出圖像對於解決本題更清楚。

這道題我們分別採用代數法和幾何法考察，分別用到了不同的知識，但是解一元二次方程卻貫徹於其中每種方法，所以對於一元二次方程的掌握是根本知識，而掌握了這個基礎知識更是解決更高難度問題的保證。

例2、（2010/2011學年入學考試試題第3題）

(a) 證明 $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$。[提示：使用 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$。]

(b) 求最小的正 θ 使得 $\tan 3\theta = \frac{1}{\tan\theta}$。答案以 arctan 表示。

(a) 令 $A=2\theta$，$B=\theta$ 使用提示中的三角公式便可以得出結論，我們在此略證。

(b) $\tan 3\theta=\frac{1}{\tan\theta}$，即 $\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$，令 $x=\tan\theta$，得到 $\frac{1}{x}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$，即 $x^4-6x^2+1=0$，又令 $y=x^2$，得到 $y^2-6y+1=0$，解得：$y_1=3+2\sqrt{2}$，$y_2=3-2\sqrt{2}$。得到：$x_1=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{3+2\sqrt{2}}=-(1+\sqrt{2})$，$x_3=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，$x_4=-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$。

因為要我們求解最小的正 θ，所以當 $\tan\theta=\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ 時，即 $\theta=\arctan(\sqrt{2}-1)$ 時有 $\tan 3\theta=\frac{1}{\tan\theta}$。

評析：本題的第一個問題比較簡單，在這裡我們進行了簡單敘述。對於第二個問題則比較複雜，在求解過程中使用了多次的換元法，最後化為一個一元二次方程求解根的問題。當得到 $\tan\theta$ 的四個值後，也就是得到本題中的四個 x 的值後，可以在正切函數的圖像上進行考察，會看到當 $\tan\theta=x_3=\sqrt{2}-1$ 時會得到本題的解。對於根式的計算，比如 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$，因為 $3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{1}+1=(\sqrt{2}-1)^2$，所以 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$。

例3、（2010/2011學年入學考試試題第12題）

(a) 用棣美弗定理，證明 $\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$。

(b) 用(a)的結果，求所有可能的 α 值，其中 $0\le\alpha\le\pi$，使得 $\cos\alpha$ 是方程 $16x^4-20x^2+5=0$ 的根。

(c) 用(b)的結果，證明 $(1-\cos\frac{\pi}{10})(1-\cos\frac{3\pi}{10})(1-\cos\frac{7\pi}{10})(1-\cos\frac{9\pi}{10})=\frac{1}{16}$。

由此，或用其他方法，求 $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$。

(a) 由棣美弗定理 $(\cos\alpha+\cos\alpha)^5=\cos 5\alpha+i\sin 5\alpha$，比較等式兩邊，我們只選擇考察實數部分，得到 $\cos 5\alpha=\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha\sin^2\alpha+5\cos\alpha\sin^4\alpha=\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha(1-\cos^2\alpha)+5\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)^2=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$。

(b) $16x^4-20x^2+5=0$ 與 $16x^5-20x^3+5x=0\ (x\neq0)$ 是等價的。既然 $\cos\alpha$ 是方程 $16x^4-20x^2+5=0$ 的根，那麼就有 $16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha=0\ (\cos\alpha\neq0)$。即 $\cos 5\alpha=0$ 且必須滿足 $\cos\alpha\neq0$。由此可得 $5\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$，即 $0\le\alpha=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\le\pi$，其中 k 只可以是 $0, 1, 2, 3, 4$，但是 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，即 $k\neq2$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{10}$，$\frac{3\pi}{10}$，$\frac{7\pi}{10}$，$\frac{9\pi}{10}$。

(c) 根據解方程我們可以知道：$16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha=16(\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{10})(\cos\alpha-\cos\frac{3\pi}{10})(\cos\alpha-\cos\frac{7\pi}{10})(\cos\alpha-\cos\frac{9\pi}{10})$，我們令 $\cos\alpha=1$ 得 $16(1-\cos\frac{\pi}{10})(1-\cos\frac{3\pi}{10})(1-\cos\frac{7\pi}{10})(1-\cos\frac{9\pi}{10})=16-20+5=1$，所以 $(1-\cos\frac{\pi}{10})(1-\cos\frac{3\pi}{10})(1-\cos\frac{7\pi}{10})(1-\cos\frac{9\pi}{10})=\frac{1}{16}$。$\cos\frac{7\pi}{10}=-\cos\frac{3\pi}{10}$，$\cos\frac{9\pi}{10}=-\cos\frac{\pi}{10}$，代入 $(1-\cos\frac{\pi}{10})(1-\cos\frac{3\pi}{10})(1-\cos\frac{7\pi}{10})(1-\cos\frac{9\pi}{10})=\frac{1}{16}$ 得到：$(1-\cos^2\frac{9\pi}{10})(1-\cos^2\frac{3\pi}{10})=\frac{1}{16}$，即 $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}$。

我們還可以用另外一種方法解決這個問題：先解方程 $16x^4-20x^2+5=0$，我們使用換元法，另 $y=x^2$，得方程 $16y^2-20y+5=0$，解得 $y_1=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$，$y_2=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$。從而知道 $x_1=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$，$x_2=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$，$x_3=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$，$x_4=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$。利用本

題(b)中的結論我們知道$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$，$\cos\frac{9\pi}{10}=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$，$\cos\frac{3\pi}{10}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$，$\cos\frac{7\pi}{10}=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$。所以 $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\sqrt{(1-\cos^2\frac{\pi}{10})(1-\cos^2\frac{3\pi}{10})}=\frac{1}{4}$。

評析：本題的前兩問都是比較常規的，方法也比較簡單。第三問則有些難度，其中應用了原理“如果方程 $a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 有根 x_1，x_2，…，x_n，那麼 $a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_1(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$”。在最後求解$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$，我們不僅可以使用三角函數公式$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$；我們還可以使用方程直接把$\sin\frac{\pi}{10}$和$\sin\frac{3\pi}{10}$的值求出來。同時根據本題的(b)我們可以得到$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$，$\cos\frac{9\pi}{10}=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$，$\cos\frac{3\pi}{10}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$，$\cos\frac{7\pi}{10}=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ 等等這些結論，這樣就有助於我們求解 $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$。

數學（A）試題考察了多種數學思維方法，其中包括換元法，高次方程的降次法，數形結合法、一元二次方程法等等。在做整張試卷過程中，我們發現在解題中多次使用到一元二次方程的知識，這足以說明一元二次方程的重要性，如果考生能夠牢牢地掌握一元二次方程的各種解法和性質，相信在考試中能夠順利解決遇到的一元二次方程問題。

三角是入學考試中常考不衰的問題，而三角問題需要很多的解題技巧，這就要求考生在平時的學習和複習中多注意總結關於三角的一般解題方法和常見的三角公式，比如三角函數的誘導公式、和角公式、半角公式、倍角公式、和差化積公式、$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$等等公式。

函數（數列是一種特殊的函數）、方程（組）是歷來考察的重點對象，試卷中大部分題目也是圍繞著函數和方程來出題的，明確函數的性質是重要的。基本微積分和曲線的描繪也都是以函數為依託的。

立體幾何和解析幾何、概率論與二項式定理幾乎是每年必考的內容。總之為了有效的區分考生，試題會從不同的角度、不同的知識點、不同的思想方法來命制題目。

【參考文獻】

人民教育出版社中學數學室編著(2003)。全日制普通高級中學教科書（必修）：數學第一冊（下）。北京市：該社。

石雷

澳門大學教育學院碩士研究生。