從向量減法談教學設疑和數學定義

文｜卓雅　白馨蔚　江春蓮

筆者最近對學生的教學實習進行視導時，聽了一節《向量的減法》，該班使用的是人民教育出版社的教材[1]，該節課的內容是這樣安排的：（1）相反向量$-\vec{a}$的定義（與$\vec{a}$長度相等、方向相反的向量）和性質（$-(-\vec{a})=\vec{a}$，$(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=0$）；（2）向量減法的定義（$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$）及幾何意義（從向量$\vec{b}$的終點指向向量$\vec{a}$的終點的向量）；（3）向量減法的例題及課堂練習。

從演繹數學的角度來講，該節課沒有任何不足。可從培養學生的數學能力來說，卻有很大的斟酌空間，如為什麼要定義相反向量？相反向量為什麼要定義為長度相等、方向相反的向量？在這裡，定義相反向量應該是出於運算的需要，要解釋這一需要，則需先定義向量減法，可向量減法是用相反向量定義的，這不是就循環了嗎？要講清這個問題，則需對整個內容進行重新設計，於是有了下面的設計。

一、在復習向量加法的基礎上提出一個與向量減法有關的問題

如圖1，若$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，則由平行四邊形法則知：平行四邊形$OACB$的對角線$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$。

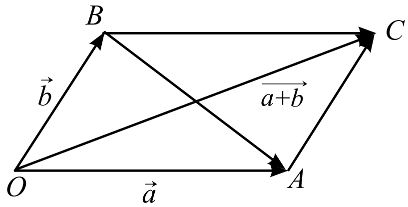

圖1

一個平行四邊形有兩條對角線，那麼另一條對角線BA所對應的向量$\overrightarrow{BA}$呢？疑問由此產生。學生沒法馬上得到$\overrightarrow{BA}$，但可以由向量加法的三角形法則（或向量的首尾相連法則[2]）得到$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，即$\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$（1）。

那麼這裡可否仿照數的減法（如$a+b=c$，則$b=c-a$）定義向量的減法呢？為什麼不可以呢！所以由$\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，可以得到$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$（2）。這裡先設疑，再類比減法得到$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，很快就可以得到減法的幾何意義：兩向量的減法是將兩向量的起點放在一起後，由

減向量指向被減向量的向量。這樣的開頭能給學生留下深刻的印象。其圖形也比教材[1]上的圖（圖2）簡單得多。

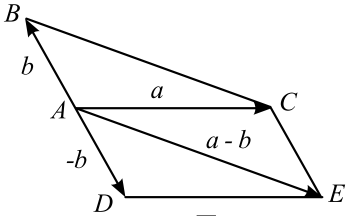

圖 2

二、在加法的基礎上賦予$-\vec{b}$幾何意義

在圖1中，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$（3），又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}$（4），比較（2）（3）（4）式，不難得到$\overrightarrow{CA}=-\vec{b}$，從而得到$-\vec{b}$的幾何意義：與$\vec{b}$長度相等，方向相反的向量。這種向量我們可以給它一個名稱叫相反向量。

三、在向量加法、減法和相反向量的基礎上將向量加法和減法統一起來，建立較為完整的數學認知結構。

由上面討論我們可以總結得到如下幾點：

(a) 向量減法是向量加法的逆運算；

(b) $\vec{a}-\vec{b}$可以看作是$\vec{a}+(-\vec{b})$；

(c) 由$\vec{a}+(-\vec{a})=0$及$-(-\vec{a})+(-\vec{a})=0$得：$-(-\vec{a})=\vec{a}$，此即相反向量的性質（當然，這個也可以由其幾何意義得到解釋！）

數學定義大致有兩種途徑，一種用來表示某種普遍的規律，如概率、直線的斜率和截距等；一種則出於運算的需要，如負數、分數、無理數、虛數等可依次看作是方程$x+a=b(a,b\in N, a>b)$，$ax=b(a,b\in Z, a$不整除$b)$，$x^2=2(x\in Q)$，$x^2=-1(x\in R)$在給定的範圍內無解而擴充數系使其保持原有的運算律而引入的，這裡的相反向量也是這樣產生的。要講清這一點，需要設疑和解疑。

數學定義是數學中最基礎的部分。對學生來說，知道概念是什麼很重要，但更重要的是要明白為什麼一個概念要那麼定義！這樣，才能在以後的學習中根據問題解決的需要定義自己的概念。

該節課的例題設計也不是很好，第一題是給定四個不共點的向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$，求$\vec{a}-\vec{b}$和$\vec{c}-\vec{d}$。第二題是圖1中，如何用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示$\overrightarrow{OC}$和$\overrightarrow{BA}$。老師們可能覺得這2個例題太簡單，但又找不著合適的。筆者在這裡補充一個。

在圖3中，已知$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，

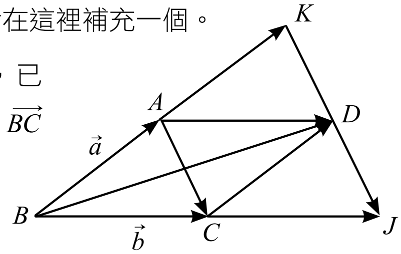

圖 3

（1）試用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BJ}$、$\overrightarrow{KJ}$等。

（2）根據圖中的回路寫出一些向量的等式。

可以內進，學生可能有些創意的表達，如$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}$，即$2\vec{b}=(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})$。可以內進也為下節“向量的數乘”埋下了伏筆。

【參考文獻】

1. 人民教育出版社課程教材研究所中學數學課程教材研究開發中心編著（2007）。*普通高中課程標準實驗教科書：數學4必修A版*（二版）。北京市：該社。
2. 張景中、彭翕成（2008）。論向量法解幾何問題的基本思路。*數學通報，47*（2），6-10。

卓雅

濠江中學教師。

白馨蔚

華東師範大學數學系學生，澳門大學教育學院交流生。

江春蓮

澳門大學教育學院助理教授。