關於圓外切正多邊形一個猜想的提出及其證明

文 | 魏澤夫

2011年我參加了教育部與澳門教育暨青年局組織的《內地優秀教師來澳交流計劃》，參與教業中學的教學改革工作。在研究《正多邊形與圓》一節課時，為了使學生真實感受到圓外切正多邊形判定定理的發現過程，我們設計了如下的問題系列：

問題一：1. 什麼叫做正多邊形？2. 怎樣作出一個圓的內接正多邊形？3. 怎樣作出一個圓的外切正多邊形？

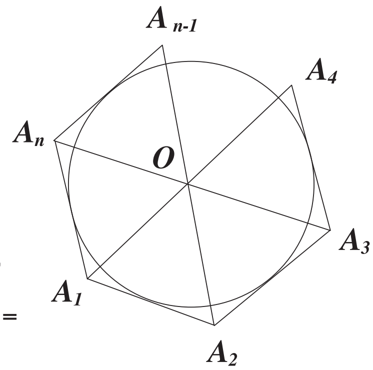
問題二：各角相等的圓外切多邊形是否為正多邊形？（啟發學生考慮特例，得出猜想：各角相等的圓外切多邊形一定是正多邊形。）

在實際教學中，這種設計極大地激發了學生的學習興趣，取得了理想的教學效果。

在教學反思中，有一位教師注意到圓外切三角形、四邊形的情形，提出了一個猜想：雖然各邊相等的圓外切多邊形不一定是正多邊形（例如圓外切菱形），但是當邊數為奇數時一定是正多邊形。

研究發現，這個猜想是正確的。下面給出這個猜想的證明：

證明：設各邊都相等的多邊形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 外切於圓O，其中 n 為奇數，如圖：在ΔA_1OA_n和ΔA_1OA_2中，$\because$ A_1A_n 和 A_1A_2 都是圓O的切線，由圓的切線性質可知$\angle A_nA_1O=\angle A_2A_1O$，



$\because$ $A_nA_1=A_2A_1$，

$\therefore \Delta A_1OA_n \cong \Delta A_1OA_2$，

$\therefore OA_n=OA_2$，同理可得$OA_2=OA_4=\cdots=OA_{n-1}$，且$OA_1=OA_3=\cdots=OA_n$，

$\therefore OA_1=OA_2=OA_3=\cdots=OA_{n-1}=OA_n$，

$\therefore \angle A_nA_1A_2=\angle A_1A_2A_3=\cdots=\angle A_{n-1}A_nA_1$，即$n$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的各內角都相等。

綜上，n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$為正多邊形。

這是一個比較典型的教學案例。由此可見，深入研究教材教法，密切關注學生的思維活動，精心設計教學過程，並不斷進行教學反思，對於提高教師的專業素質是十分重要的。

魏澤夫

吉林省中學特級教師，原任教於吉林省吉林市第一高級中學，2008至2011學年任職於教育暨青年局，曾參與濠江中學和教業中學的教學革新工作。