

# ▶ 數學美 · 數學眼光 · 數學興趣

圖·文 | 許明仔 梁國汶 梁黃傑 孫旭花

**教**好數學的第一任務，不是灌輸知識，而是培養興趣。有了興趣，學生的數學學習就不是短期學習，而是終身學習，自己就會從被動變為主動，吸收知識。然而目前的數學課程都強調短期目標“基本技能、基本技巧、基本能力”，長期目標“數學興趣”的關注明顯不足。如何真正培養數學興趣，始終未能提升到數學課程的核心位置上。本文從大自然數學美等實例，談談數學教師應當如何善於用美的眼光審視、挖掘、整理和顯示出數學的美，讓學生充分感受到一個五彩繽紛的數學美，從而對數學學習產生濃厚的興趣，彌補當前數學課程的先天不足。

大自然很多動物特別具有“數學頭腦”。鼯鼠幾乎是瞎眼，但它在地底下挖掘的隧道，總是沿著90度轉彎。丹頂鶴總是成群結隊排成“人”字形遷徙，而這“人”字形的夾角永遠是110度。據科學家表明，這“人”字形夾角的一半恰好是金剛石結晶體的角度。螞蟻的計算

本領也十分高明，英國科學家亨斯頓曾做過一個有趣的實驗：把一隻死蚱蜢按“4、2、1”的體積切成三塊，當螞蟻發現這三塊食物四十分鐘後，分別聚集在食物邊的數量比恰好也是“4、2、1”。蜘蛛結的“八卦”網，是既複雜又美麗的八角形幾何圖案。人們即使用直尺或圓規也很難畫得像蜘蛛網那樣勻稱。而且配合蛛絲的強韌特性，可以抵抗強風吹襲。這是巧合還是大自然的某種默契？至今還是不解之謎。達爾文曾讚嘆：蜜蜂的巢房是自然界最令人驚訝的神奇建築。蜜蜂的巢房是如何令他覺得神奇？如何令人覺得驚訝？本文聚焦蜂巢之數學機密和向日葵的發散角為例。

## 蜂巢之數學機密

蜜蜂可以算是自然界中最精妙的幾何專家，其六邊巢令人歎為觀止！蜜蜂建築時，青壯年工蜂負責分泌片狀新鮮蜂蠟，每片只有針頭大小。而另一些工蜂則負責將這些蜂蠟仔細擺放

到一定的位置，形成嚴格的豎直六角柱狀體，它的一端是平整的六角形開口，另一端是封閉的六角菱錐形底口，由三個相同的菱形組成，菱形的鈍角為 $109^{\circ}28'$ ，所有的銳角為 $70^{\circ}32'$ ，而且蜂房的巢壁厚 $0.073$ 毫米，誤差極小。與此同時，每一面蜂蠟隔牆厚度不到 $0.1$ 毫米，誤差只有 $0.002$ 毫米。六面隔牆寬度完全相同，牆之間的角度也正好是 $120^{\circ}$ ，形成一個完美的嚴格的六角柱狀體，由三個相同的菱形組成。有趣的是無論哪個蜂巢，組成底盤的菱形的所有鈍角都等於 $109^{\circ}28'$ ，所有銳角都等於 $70^{\circ}32'$ 。這個資料與數學家確認的“要消耗最少的材料，製成最大的菱形容器”的資料一分不差。而一個個正六角形的中空柱狀房室的巢房，背對背對稱排列組成，六角形房室之間相互平行，每一間房室的距離都相等。每一個巢房的建築，都是以中間為基礎向兩側水平展開，從其房室底部至開口處有 $13^{\circ}$ 的仰角，則是為了避免存蜜的流出。另一側的房室底部與這一面的底部又相互接合，由三個全等的菱形組成。

這樣的建築打造可以用最少的建築材料獲得最大的使用空間，而且精巧適用，牢固無比。更叫絕的是，世界上所有的蜂窩都是按照這個統一的角度和模式建造的，這令人類建築師都驚歎不已！人們總是疑問，蜜蜂巢室，為什麼不呈三角形、正方形或其他形狀呢？隔牆為什麼呈平面，而不是呈曲面呢？

古埃及人也早就知道，唯有正三角形、正方形、正六邊形，能各自鋪成一平面。經過 $1600$ 年努力，數學家終於證明蜜蜂是世界上工作效率最高的建築者。其實，早在西元前 $180$ 年，古希臘數學家Zenodorus證明出：

1. 周長固定的 $n$ 邊形，以正 $n$ 邊形的面積最大。而且 $n$ 越大，面積越大。

2. 周長固定時，圓面積大於所有正多邊形面積。

四世紀古希臘數學家貝波司提出，蜂窩的優美形狀，是自然界最有效經濟的建築代表。他猜想，人們所見到的、截面呈六邊形的蜂窩，是蜜蜂採用最少量的蜂蠟建造成的。他的這一猜想稱為“蜂窩猜想”，但這一猜想直至 $1999$ 年才由黑爾證明。西元 $1943$ 年，匈牙利數學家陶斯巧妙地證明，在所有首尾相連的正多邊形中，正多邊形的周長是最小的。但如果多邊形的邊是曲線時，會發生什麼情況呢？陶斯認為，正六邊形與其他任何形狀的圖形相比，它的周長最小，但他不能證明這一點。而黑爾在考慮了周邊是曲線時，無論是曲線向外凸，還是向內凹，都證明了由許多正六邊形組成的圖形周長最小。

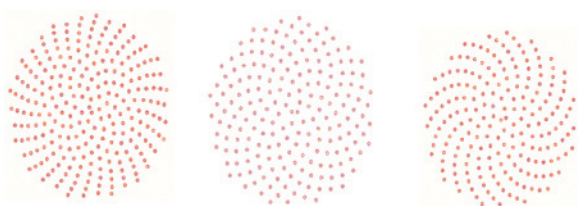
蜂窩的結構帶給航天器的設計師們很大的啟示。他們在研製時，模仿了蜂窩結構：先用金屬製造成蜂窩，然後再用兩塊金屬板把它夾起來就成了蜂窩結構。這種蜂窩結構強度很高，重量又很輕，還有益於隔音和隔熱。因此，現在的太空梭、人造衛星、太空船內部都大量採用蜂窩結構，衛星的外殼也幾乎全部是蜂窩結構。因此，這些航天器又稱為“蜂窩式航天器”。

蜂巢不僅引發了數學“蜂窩猜想”，設想數學教學如果能在“尋找面積最大、周長最小的平面圖形”引入蜂窩等數學問題，不僅可以解析大自然的數學的“魔法”，而且可能改變學生審察世界的數學眼光！

## 向日葵的發散角

植物細胞的原基<sup>(1)</sup>的生長遵循着某種幾何原理，有效率地排序。 $1979$ 年，數學家伏格（H. Vogel）以電腦模擬原基的生長情形，他用圓點來代表向日葵的原基，在發散角為固定

值的假設下，試圖找出最佳的發散角，使這些圓點盡可能緊密地排在一起。他的電腦實驗顯示，當發散角小於 $137.5$ 度，圓點間就會出現空隙，而只會看到一組螺線；同樣地，如果發散角超過 $137.5$ 度，圓點間也會出現空隙，但是這次看到的是另一組螺線。因此，如果要使圓點排列沒有空隙，發散角就必須是 $137.5$ 度；而這時，兩組螺線就會同時出現。簡言之，要使花頭最密實、最堅固，最有效的堆排方式是讓發散角等於 $137.5$ 度。 $137.5$ 度就是黃金角。我們把一個圓周角（ $360$ 度）以黃金比值 $0.618$ 劃分，得出約 $222.5$ 度；另一方面，劃分後餘下的角度為 $137.5$ 度，這個黃金角度在植物的生長當中擔當重要角色。下圖，我們看到多 $0.1$ 度和少 $0.1$ 度，都是一組螺旋，可謂是失之毫釐，差以千里。



發散角為  
 $137.6$ 度

發散角為  
 $137.5$ 度

發散角為  
 $137.4$ 度



## 對數學教學的啟示

雖然這些內容不是目前的課程內容，但是我們深信，這些內容的引入，能培養學生審視世界的目光，帶給數學教學新的生機。目前學校培養興趣的手段多數僅僅求助於奧林匹克數學等數學比賽，興趣培養始終制約於考試。考得好有興趣，考得差則一蹶不振。興趣培養如

何擺脫競爭求勝的外部刺激，挖掘數學內部潛力，關注不多。筆者認為教師若能培養學生從數學美的角度關注身邊的事物，通過對大自然的認識，可以使學生產生探索數學的動力，令學生在感知審美物件的基礎上引起情感反應，產生積極聯想。不僅培養美育，更為重要的是，可以培養數學眼光，數學興趣，令數學學習一勞永逸。🌱

### 【註釋】

1. 原基：Primordium，又稱始基。為植物中以後發展成一個專一組織、器官或軀體一部分的細胞基團。



許明仔

澳門大學教育學院數學專業四年級學生。



梁國汶

澳門大學教育學院數學專業四年級學生。



梁黃傑

澳門大學教育學院數學專業四年級學生。



孫旭花

澳門大學教育學院助理教授。