解決數學問題的思路從何而來？
——以高中《兩角差的餘弦公式》為例

文 • 圖 | 江春蓮　桂鵬　蘇洪雨

《兩角差的餘弦公式》是三角函數和、差、倍、半公式的“源頭”，其教學也受到一線數學教師的關注(1)(2)(3)。在這些文章中，都是先提示可否利用 30° 角和 45° 角的三角函數值來計算 15° 和 75° 的三角函數值，從對 $\cos30^\circ+\cos45^\circ$ 的計算與 $\cos75^\circ$ 比較，得出 $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$；當然也可以通過計算 $\cos45^\circ-\cos30^\circ$ 與 $\cos15^\circ$，得出 $\cos(\alpha-\beta)\neq\cos\alpha-\cos\beta$。緊接着就講解 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ 的不同的證明方法，分別分析如下。

方法一、三角函數線法

設角 α 終邊與單位圓的交點為 P_1，$\angle POP_1=\beta$，則 $\angle POX=\alpha-\beta$。過點 P 作 $PM\perp OX$ 於點 M，則 OM 為 $\alpha-\beta$ 的餘弦線；過點 P 作 $PA\perp OP_1$ 於 A，過點 A 作 $AB\perp OX$ 交於 B，過點 P 作 $PC\perp AB$ 於 C。

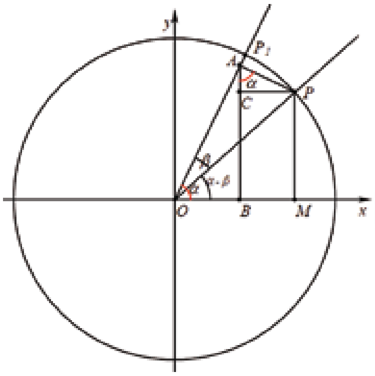

圖 1

則 $PA=\sin\beta$，$OA=\cos\beta$，$\angle PAC=\alpha$，所以 $OM=OB+BM=OB+CP=OA\cdot\cos\alpha+PA\cdot\sin\alpha=\cos\beta\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

這裡的推導依賴於圖形所表達的數量關係，α、β 要滿足的條件是：α、β、$\alpha-\beta$ 都是銳角。在這個構圖中，α、β 共終邊，α 所在三角形 ΔAOB 的斜邊是 β 所在三角形 ΔPAO 的直角邊，要求的角 $\alpha-\beta$ 的餘弦需要過渡到兩條線段 OB、PC 的和，輔助線的作法比較繁瑣。

方法二、向量法

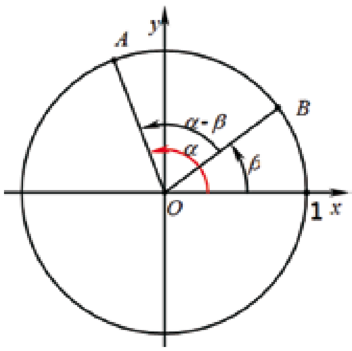

圖 2

則 $\vec{OA}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\vec{OB}=(\cos\beta, \sin\beta)$
由向量數量積的概念，有

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$。

由向量數量積的座標表示，有

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

因為 α、β 都是任意角，$\alpha-\beta$ 也可以是任意角，由誘導公式總可找到一個 $\theta\in[0, 2\pi)$，使得 θ 與 $\alpha-\beta$ 共終邊。

若 $\theta\in[0,\pi]$，

則 $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\cos\theta=\cos(\alpha-\beta)$。

若 $\theta\in(\pi,2\pi)$，

則 $2\pi-\theta\in(0,\pi)$，$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta=\cos(\alpha-\beta)$。

於是對於任意角 α、β 都有：

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

這裡的 α、β 可以是任意角。這個證法需要用到向量的數量積的幾何意義及其代數表示，要想到這個對學生來說，有點難度。

方法三、距離法

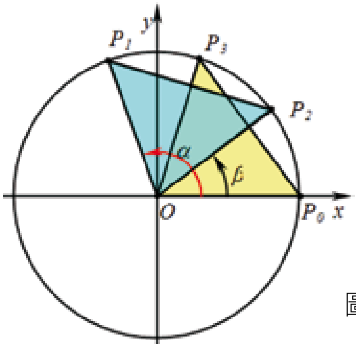

圖 3

如圖，在直角坐標系 xOy 中，單位圓 O 與 x 軸交於 P_0，以 Ox 為始邊分別作出角 α、β、$\alpha-\beta$，其終邊和單位圓分別交於 P_1，P_2，P_3，由 $|\vec{P_0P_3}|=|\vec{P_2P_1}|$ 可得：

$[1-\cos(\alpha-\beta)]^2+\sin^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$。

化簡得：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

這個證法比較簡潔，但對學生來說，也是比較難想到的。

上述三種證明方法都很難想到，那些由個別的例子得到公式的方法也有些牽強。如何讓學生找到這些證明方法呢？要解決這個問題，可以回到最開始的 15° 和 75° 三角函數值的計算。

方法四、第一步：計算 $\cos 15^\circ$。

因為 $15^\circ=45^\circ-30^\circ$，我們可以構造圖 4。

在圖4中，設 $AB=1$，則 $AD=\sqrt{2}$，$BD=1$，

$BC=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

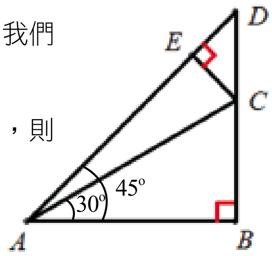

圖 4

$AC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $CD=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD=\dfrac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6}$，

$AE=AD-DE=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6}$。

所以 $\cos 15^{o}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。

這個構圖將30^{o}和 45^{o}的始邊重合在一起，得到要求的15^{o}，要求15^{o}的餘弦，自然在其所在的 ΔACD 中作垂線CE，進而去尋找 AE 和 AC，因為 AB 在 30^{o}和 45^{o}所在的兩個直角三角形 ΔABC 和 ΔABD 中，設其為 1 可以簡化計算。

第二步：推廣$\cos 15^{o}$至一般的 $\cos(\alpha-\beta)$，$0^{o}<\beta<\alpha<90^{o}$。

這裡的推廣很簡單，只需要把上題圖中的45^{o} 換成 α，30^{o}換成β（圖5），其餘的基本不變。還是設$AB=1$，則$AD=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$BD=\tan\alpha$，$BC=\tan\beta$，$AC=\dfrac{1}{\cos\beta}$，所以 $CD=\tan\alpha-\tan\beta$，$DE=CD\cdot\sin\alpha$，$AE=AD-DE=\dfrac{1}{\cos\alpha}-(\tan\alpha-\tan\beta)\cdot\sin\alpha$。

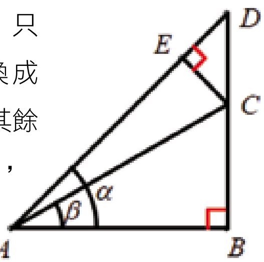

圖 5

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{AE}{AC}=[\dfrac{1}{\cos\alpha}-(\tan\alpha-\tan\beta)\cdot\sin\alpha]\cdot\cos\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

縱然，這裡我們依據圖 5得到$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$對$0^{o}<\beta<\alpha<90^{o}$成立，這種特殊條件下成立的普遍公式對一般的角也應該是成立的。

這裡的證明就是將前面的 45^{o}和 30^{o}換成 α 和 β，而將所有的邊用 α 和 β 的三角函數來表示，最後公式的化簡過程也只需要將正切換成正弦和餘弦的表示，並用到學生熟悉的關係式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

方法五、同樣地，計算$\cos 75^{o}$可以構造圖 6所示的圖，對於 α, β, $\alpha+\beta$ (0^{o}, 90^{o})，求$\cos(\alpha+\beta)$可以用圖 7。

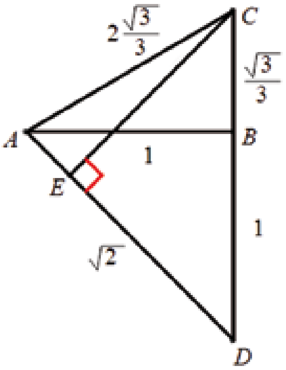

圖 6

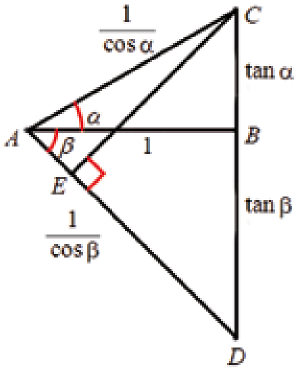

圖 7

在圖 7中，設 $AB=1$，則 $AC=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$BC=\tan\alpha$，$BD=\tan\beta$，$AD=\dfrac{1}{\cos\beta}$，所以 $CD=\tan\alpha+\tan\beta$，$DE=CD\cdot\sin\beta$，$AE=AD-DE=\dfrac{1}{\cos\beta}-(\tan\alpha+\tan\beta)\cdot\sin\beta$。

所 以 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{AE}{AC}=[\dfrac{1}{\cos\beta}-(\tan\alpha+\tan\beta)\cdot\sin\beta]\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

分析

1. 方法四和方法五中，將我們需要的角15^{o}，75^{o}作出來的組合是很自然的，要求其餘弦，作垂線的過程也順理成章，從這兩個角到一般

的銳角的推廣，圖形不需要作任何的變動，只是把特殊角的三角函數值換成一般角的表示，與文（1）中討論的幾種處理相比，簡單得多。這也是從特殊到一般的歸納法的使用。

2. 從圖 5和圖 7中的兩個直角三角形中可以得到$\sin(\alpha-\beta)$和$\sin(\alpha+\beta)$的公式。$S_{\alpha+\beta}$和$S_{\alpha-\beta}$的公式還可以用面積法得到。如在圖 7中，由$S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ABD}$得 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\alpha+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\beta$，化簡即得$S_{\alpha+\beta}$的公式。
3. 教材上兩角和與差正餘弦公式的安排順序是$C_{\alpha-\beta}\to C_{\alpha+\beta}\to S_{\alpha+\beta}\to S_{\alpha-\beta}$。我們也可以按$S_{\alpha+\beta}\to S_{\alpha-\beta}\to C_{\alpha-\beta}\to C_{\alpha+\beta}$安排。
4. 儘管這裡的構圖用的是銳角，但也不失一般性。對一般的角，我們可以考慮由誘導公式去推導。誘導公式的口訣“奇變偶不變，符號看象限”不也是假設其中的角是銳角嗎？為什麼一定要構造那些學生無法自然想到的圖呢？

數學在培養學生的思考能力方面扮演着重要的角色，只有每節數學課都給學生機會用自己自然的思路解決數學問題，數學能力的培養目標才能真正得到落實！

【註釋】

1. 薛紅霞，張立平。（2011）。*數學教學的理想與現實──基於40位教師對《兩角差的餘弦》說課的分析。* 中小學數學（中學版），2011(10)，14-17.。
2. 柳榕。(2011)。*基於《兩角差的餘弦》的同課異構案例評析*。福建中學數學。2011(11)，25-28。
3. 朱秀紅。（2011）。*蘇教版《兩角和與差的餘弦》之教學設計*。中學數學月刊。2011(1)，16-17。

江春蓮

澳門大學教育學院助理教授。

桂鵬

廣州市華南師範大學附屬中學高級教師。

蘇洪雨

廣州市華南師範大學數學科學學院副教授。