

從掌握數學知識到理解科學定律：以“比”為實例

文 | 阮邦球 劉靜文

引言

數學是生活不可分割的一部分，任何學科的發展都離不開數學。認識數學對理解科學起着超然的作用。本文以數學中“比”為實例，探討從認識比的概念來理解科學定律的過程，以突顯數學在自然科學教學中的重要。

一、問題的提出

在教學過程中，筆者體會到學生對自然科學概念、原理的錯誤理解，與缺乏基礎數學知識有莫大的關係。舉例來說，部分學生在闡述力、質量和加速度三變量之間的關係時有誤、在區別比重和密度時有所混淆等等，這與學生對數學中“比”的認識不足有相當的關連。

二、比的數學概念

比可用數學符號“：”或“—”來表示。它等同於一個除法算式或分數表示式，用於表述兩個數值或兩個變量間的關係。例如： $A \div B$ ，可用 $\frac{A}{B}$ 表示；或 $\frac{A}{B}$ ，亦可用 $A : B$ 表述。

舉例來說，牛頓第二定律的公式為： $F = ma$ 。神舟十號在太空失重條件下的演示實驗，運用作用力（ F ）與加速度（ a ）的關係而求得太空人的質量（ m ）： $m = \frac{F}{a}$ 。

用文字表述此關係式時，部份學生認為：“物體的質量是其加速度和作用力之比”與“物

體的質量是其作用力和加速度之比”是沒有差異的。其錯誤的根源在於不明白比的數學概念。

“物體的質量是其加速度和作用力之比”的符號表述為 $m = \frac{a}{F}$ ，而“物體的質量是其作用力和加速度之比”則為 $m = \frac{F}{a}$ ，只有後者才能正確地描述變量間的關係。

三、比值與比率

比值（ratio）是相同物理量之比，沒有物理單位。例如：身體重量與血液重量的比，只有數值而沒有物理單位。比率（rate）是不同物理量之比，是一個具有物理單位的數值。在物理學上，速率是距離變化和時間變化之比是比率，其常用單位為千米/秒。

比重和密度是不同的概念。密度是物體的質量與物體的體積的比，其數值是比率而非比值，具物理單位。比重是某物體的密度與水的密度之間的比值；或在相同體積下，物體的質量與水的質量之間的比值。密度是物體的質量與物體的體積的比，是比率而非比值。

四、比值與比率的數學表示式

比值與比率的數值可用小數或分數來表示。小數和分數可互為轉換，舉例：0.20是小數， $\frac{1}{5}$ 是分數，它們的數值是相等的。而百分數是以分母為 100 時的分數值， $\frac{1}{5}$ 是分數，它的百分數是 $\frac{20}{100}$ 。

如下數學表示式是由小數到分數，再由分數到百分數之間轉換的呈現：

$$0.20 = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$$

在數值上，百分數中的百分之一是等於1%，其比值與比率被分別稱為百分比和百分率。在化學術語方面，百分數、百分比和百分率三者不作具體區分，可互用。

$$\therefore \% = \frac{1}{100} \quad \therefore \frac{20}{100} = 20\%$$

五、化學學科中比的應用

在化學學科，比的概念廣泛地應用於表述物質的組成和數量關係。

化合物中，某元素質量和化合物質量的比常用於表示化合物中某元素的含量。例如：水化合物是由氫元素和氧元素所組成的，氫元素在水化合物中所佔份量可用氫元素的質量 (m_H) 與水化合物的質量 (m_{water}) 之比或百分比 (%) 來表示，它們沒有物理單位，為比值。

氫元素的含量：

$$\text{比} = \frac{m_H}{m_{water}} = \frac{m_H}{m_H + m_O}$$

氫元素的百分含量：

$$\text{百分比} = \frac{m_H}{m_{water}} \times 100\% = \frac{m_H}{m_H + m_O} \times 100\%$$

物質的質量 (m) 和物質的式量 (μ) 之比是代表純淨物的物質的量 (n)。以水為例，水的質量 (m_{water}) 和水的分子量 (μ_{water}) 之比是水物質的量 (n_{water})，其物理單位為摩爾，物質的量屬比率。

$$n_{water} = \frac{m_{water}}{\mu_{water}}$$

六、定比定律的發現過程

化學是一門實驗科學，化學定律源於實驗，所得定量數據經過數學化和符號化處理而得。定比定律是物質科學的重要定律，它的形成和

發展與化學和數學緊密相關。定比定律的發現根植於兩個具體過程：化學實驗和實驗數據的數學化處理。在此以擬定的實驗數據，嘗試重組定比定律的發現過程。

1. 原始實驗數據

以不同質量的水 (m_{water}) 經實驗可得相對應的氫元素質量 (m_H) 和氧元素的質量 (m_O)。

表1：實驗的模擬原始數據：水的質量、氫元素質量和氧元素的質量

實驗編號	m_{water}	m_H	m_O
# 1	1.000	0.111	0.889
# 2	2.500	0.278	2.222
# 3	3.800	0.422	3.378

2. 數據所呈現的規律

$$m_{water} = m_H + m_O$$

3. 推導數學關係式

$$\therefore m_{water} = m_H + m_O$$

$$\therefore \frac{m_H}{m_{water}} + \frac{m_O}{m_{water}} = 1$$

$$\text{或 } \frac{m_H}{m_{water}} \times 100\% + \frac{m_O}{m_{water}} \times 100\% = 100\%$$

4. 表述物質組成的數據

$$m_H \% = \frac{m_H}{m_{water}} \times 100\% \quad \text{式 (1)}$$

$$m_O \% = \frac{m_O}{m_{water}} \times 100\% \quad \text{式 (2)}$$

$$\text{式 (1) : 式 (2), 得 } \frac{m_H}{m_O} = \frac{m_H \%}{m_O \%} \quad \text{式 (3)}$$

5. 結論

儘管水化合物中 m_{water} 、 m_H 和 m_O 的原始實驗數值各異，但必然符合 $m_{water} = m_H + m_O$ 的規律。

經數學化處理後的 $m_H\%$ 、 $m_O\%$ 和 $\frac{m_H}{m_O}$ 三項數據，分別為固定的數值。

表 2：水化合物的實驗數據及其數學化處理

原始實驗數據			數據的數學化處理		
m_{water}	m_H	m_O	$m_H\%$	$m_O\%$	$\frac{m_H}{m_O}$
1.000	0.111	0.889	11.1 %	88.9 %	$\frac{1}{8}$
2.500	0.278	2.222	11.1 %	88.9 %	$\frac{1}{8}$
3.800	0.422	3.378	11.1 %	88.9 %	$\frac{1}{8}$

因此水化合物的組成可用其氫元素百分比 ($m_H\%$)、氧元素百分比 ($m_O\%$)、或氫元素質量與氧元素的質量比 ($\frac{m_H}{m_O}$) 來表示。

七、定比定律

化學工作者經無數次的實驗確認：化合物的質量是其所組成元素的質量總和，可用數學式來表示： $m_{compound} = \sum_i m_{element\ i}$ 。

除了水的模擬數據以外，同樣地，模擬一氧化碳和二氧化碳兩種化合物的各項實驗數據，經數學化處理後可分別得到固定的組成元素質量百分比、元素的質量比，其數據整理於表3中。

表 3：一氧化碳和二氧化碳的化合物的元素質量百分比、元素的質量比

化合物	$m_C\%$	$m_O\%$	$\frac{m_C}{m_O}$
一氧化碳	42.9 %	57.1 %	$\frac{3}{4}$
二氧化碳	27.3 %	72.7 %	$\frac{3}{8}$

從實驗結果得悉：由不同元素組成的化合物，其所組成元素間的質量比必為一個固定數值的常數。水中氫元素和氧元素的質量比總是1：8，或者說它的元素質量百分比總是含氫11.1%和含氧88.9%；而二氧化碳和一氧化碳中，碳元素和氧元素的質量比分別是3：8和3：4。

定比定律闡明：一種化合物無論其來源或製備方法為何，其組成元素間必有固定數值的質量比，此種由實驗所得的定量關係，其規律性稱為定比定律，或稱定組成定律。

八、結語

在自然科學方面，認識數學的“比”，既可明白化學概念，更可理解化學定律的源由及其推導過程。例如在探究物質組成方面，化學工作者根據化學實驗數據，從各種化合物中的元素質量比推導出定比定律。

加強數學知識在科學教育中的融合，將有助於學生更好地認識科學概念和理解科學定律。

阮邦球

現職澳門大學科技學院化學講師，澳門保安部隊高等學校化學和爆炸品等課程導師，澳門化學會會長。

劉靜文

澳門科技大學行政與管理學院助理教授。