以問題幫助建立情境到一般數學公式之間的聯繫

以等差數列的前n項和為例

文 ｜ 江春蓮　黎詩林　施凱怡　袁樹浩　馮家毅

Skemp（1986）將學生對數學的理解分為關聯性理解（Rational Understanding）和機械性理解（Instrumental Understanding），關聯性理解體現在學生對數學結構、概念之間關聯的理解；而機械性理解則只關注規則的學習和記憶。如對“20”，關聯性理解是基於十進制位置制的理解，表示兩個“10”，而一個“10”表示10個“1”；機械性理解則沒有站在位置制的角度上的理解，而只知道我們用“20”表示一個數量是20的值。美國數學教師協會2000年頒佈的《學校數學的原則和標準》（NCTM，2000）中，也將關聯作為數學課程的五個過程性標準（問題解決、說理和證明、交流、關聯和表徵）之一。國際數學教育界一直以來十分強調的數學關聯（Connection），2011年新加坡數學教師大會的主題就是交流、推理和關聯（Communication, Reasoning, & Connections）。數學教學如何幫助學生建立數學知識之間的關聯，幫助學生達到關聯性的理解呢？本文中，我們以《等差數列的前n項和公式》為例，說明如何從一些簡單問題的討論過渡到多種多樣的數學問題。

在人民教育出版社（2007）的《高中數學必修5》等差數列前 n 項和公式那一節，作者從高斯十歲時候用配對的方法解答老師出的難題 $1+2+3+\cdots+100$ 引入，用一句話“人們從這個演算法中受到啟發”，引出顛倒求和的方法，進而得到前n項和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 。從配對到顛倒相加，這兩種方法有什麼樣的聯繫？為什麼後面的證明不用高斯的配對方法，配對方法的使用會出現什麼樣的問題？這些在教材中都沒能得到很好的體現和處理，而這正是數學教學需要突破的，所以我們從高斯遇到的問題開始變化，看看在什麼情況下配對的方法會遇到麻煩。

一、公式推導

【Q1】求 $1+2+3+\cdots+100$ 。

【Q2】去掉上述數列中的偶數項，得 $1+3+\cdots+99$，如何求？

【Q3】繼續去掉問題2中的序號是偶數的項，得 $1+5+\cdots+97$，如何求？

我們可以仿照 Polya (1957) 給學生提下列問題，引導學生思考：

（1）老師給高斯的是個什麼問題？（1到100的和）

（2）1到100可以看成一個數列嗎？如果可以，這個數列有什麼特點？（這個數列是等差數列，首項為1，公差為1，共有100項，末項為100）。

（3）高斯是怎麼求的？（兩兩配對，得到相同的和，共50個這樣的組合。）

（4）問題2可否繼續使用高斯的方法？（可以，因為該數列仍是等差數列，首項為1，公差為2，共有50項，末項為99。項數是偶數50，所以能配成25對。）

（5）問題3可否繼續使用高斯的方法？（好像不可以！

儘管該數列仍是等差數列，首項為1，公差為4，共有25項，末項為97。項數不是偶數，所以距離首末兩項距離相等的項只能配成12對，中間項沒有項與它配對。）中間項是什麼？它與首末兩項的和有什麼關係？（中間項是 $1+(13-1)\times 4=49$，它是首末兩項的等差中項，也就是 $a_{13}=\frac{a_1+a_{25}}{2}$。）

至此，我們可以繼續問，在項數為奇數的情況下，這些數不能完全兩兩配對，但高斯使用的公式仍然能成立嗎？答案是肯定的！因為 $(1+97)\times 12+a_{13}=(a_1+a_n)\frac{n-1}{2}+\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$。

經過這樣的過程，我們可以看到不管數列的項數是偶數，還是奇數，都可以用公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 求等差數列的前 n 項和。特別地，前 n 個自然數的和是 $\frac{n(n+1)}{2}$。

數學的神奇之處就在於看起來無法統一的東西，可以用一個統一的形式表達出來，這就是數學令人震驚、興奮的地方！

得到了 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，要推出另外一個公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 可以有兩種方法，一是直接將 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；二是將如下的 n 個式子相加：$a_1=a_1$，$a_2=a_1+d$，$a_3=a_1+2d$，⋯，$a_n=a_1+(n-1)d$。有了前面求前 n 個自然數的和做鋪墊，學生不難看出，右邊是 n 個 a_1，$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 個 d。這樣的推導方便學生記憶，更好地建立了知識之間的聯繫。

【評論】這裡也可以在高斯遇到的問題的基礎上發展出1+2+3+⋯+101，像對問題3的討論一樣，討論它的配對問題。但上面由刪項得到的數列讓學生看到更

有趣的東西。在等差數列中，刪除序號為偶數的項得到的數列仍然是等差數列。事實上，序號為偶數的項組成的數列也是等差數列。

二、例題設計

公式屬數學定理類的知識，在第一節課，重點應該放在幫助學生熟悉公式上，人教社（2007）教材上的幾個例子是：

例1：已知 $a_1=500$、$d=50$、$n=10$，求 S_n。

例2：已知 $S_{10}=310$、$S_{20}=1220$，求 S_n。

例3：已知 $S_n=n^2+\frac{1}{2}n$，求數列$\{a_n\}$的通項公式，並判斷它是否是等差數列。

例4：給定等差數列$\{a_n\}$的前三項5，$4\frac{2}{7}$，$3\frac{4}{7}$，求使S_n取最大值的 n。

前面兩個例題可以分別套用那兩個公式，但後面兩個則牽涉到等差數列的定義和二次函數的最值，不適宜放在公式的第一節課。這樣的話，可以補充什麼樣的例題呢？

在最前面的三個問題中，給出了a_1、d、n、a_n，求S_n。事實上，在a_1、d、n、a_n中，確定三個，就可以確定另外一個，所以這節課的例題，可以是如下這些類型：

（1）給定 a_1、a_n 和 n，求 S_n。（直接套用公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$）

（2）給定 a_1、n 和 d，求 S_n。（直接套用公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$）

（3）給定 a_1、a_n 和 d，求 S_n。（可以先通過 $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$ 求 n，再用兩個公式中的任意一個求 S_n）

（4）給定a_n、n和d，求S_n。（可以先通過 $a_1=a_n-(n-1)d$ 求a_1，再用兩個公式中的任意一個求 S_n）

三、設計特色

我們以3個問題，讓學生看到高斯的配對法在項數是奇數時會遇到麻煩，但等差數列的特點（奇數項的等差數列的中間項恰是首末兩項的等差中項）幫我們解決了那個麻煩！顛倒相加只是公式的特點帶來的啟示，而不能由高斯的配對法自然啟發得到，所以顛倒相加的方法可以讓學生自己去看。

第二個公式的後一種推導，有利於學生在對公式理解的基礎上記憶。

對有兩個公式的第一節課來說，主要教學目的是讓學生熟悉公式的應用，所以，可以出全是要求S_n的問題，但問題可以有不同的給定條件，如何把這些組合全部列出來呢？無非就是從a_1、d、n、a_n中四選三的組合！

我們列出的四種題型，不僅幫助學生複習了上一節的等差數列的通項公式，而且熟悉了這節課的公式，幫助學生發現數學知識之間的關聯，把數學學通學透。

【參考文獻】

人民教育出版社（2007）。*普通高中課程標準實驗教科書數學必修5*。北京：人民教育出版社。

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new respect of mathematical method.* NJ: Princeton University Press.

Skemp, R.R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics.* 2nd Edition. London: Penguin Books.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA, NCTM.

江春蓮

澳門大學教育學院助理教授。

黎詩林 施凱怡 袁樹浩 馮家毅

澳門大學科技學院學生。