怎樣上好數學習題課？

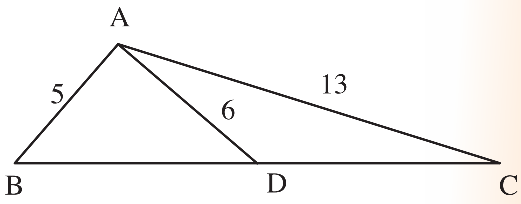
文｜袁朝川　鄧後軍

智者說：巧婦難為無米之炊，上好數學習題課的前提是根據需要精挑細選“好題”，可“好題”分散在幾十本乃至上百本參考書中，這就迫使教數學者不得不看大量的數學書，做大量的數學題，並有能力找到、找準“好題”，進而思考這個“好題”放在哪兒、哪時講，講到什麼度？一個不看書、不做題的數學老師要上好數學習題課是不可能的！

還有很多人說數學習題課要如何如何，不要如何如何，滿塘蛤蟆叫，假如一個數學教師，沒有自己的主見、沒有自己的專業自信，矮人看戲——人云亦云，被專家的純理論左右、被統編的純教材束縛、被規定的純要求制約，他要上好數學習題課也是不可能的！

諸多狀況出現（不好意思——羅列）都讓我們上好習題課成為不可能，那怎樣才能上好數學習題課？我們借一個“好題”分析分析：

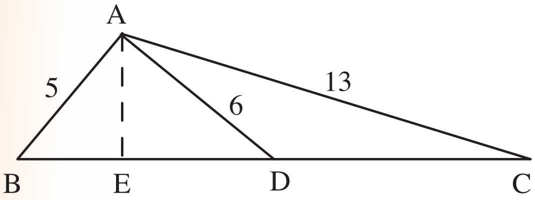
例題：在△ABC中，點D為BC中點，AB=5，AD=6，AC=13，試判斷AD與AB的位置關係。



該例題可放在幾個地方講（直角三角形、中線、中位線、全等形、矩形），不同地方講幾種方法講的順序是不同的，順序不同，產生的效果也是大不一樣的！放在直角三角形後面講，問AD與AB的位置關係？明顯位置關係

是相交（有交點A），進一步的關係懷疑是垂直（5、6的2倍12、13數字裡面有文章），分析在△ABD中，AB=5，AD=6，如果能夠求得BD的長，則可以由畢氏定理的逆定理判斷出∠BAD=90°

方法一：要求出線段的長，考慮使用畢氏定理，又能使用上 5、6、13三條邊，過A作AE垂直BC交BC於E，則AB、AD、AC都在以AE為直角邊的直角三角形中，



設AE=x，則可分別表示出

BE=$\sqrt{25-x^2}$

DE=$\sqrt{36-x^2}$

CE=$\sqrt{169-x^2}$

∵ D是BC中點，

∴ CE+BE = 2(BE+ED)

即 CE=2ED+BE，

∴ $\sqrt{169-x^2}=2\sqrt{36-x^2}+\sqrt{25-x^2}$，

平方得，

$169-x^2=4(36-x^2)+4\sqrt{36-x^2}\sqrt{25-x^2}$

$+25-x^2$

$4x^2=4\sqrt{36-x^2}\sqrt{25-x^2}$

$x^2=\sqrt{36-x^2}\sqrt{25-x^2}$

平方得，$36\times25-61x^2+x^4=x^4$

$$x^2=\frac{36\times25}{61}=\frac{900}{61}$$

$$BE=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{\frac{25\times61-900}{61}}=\sqrt{\frac{625}{61}}$$

$$=\frac{25}{\sqrt{61}}=25\frac{\sqrt{61}}{61}$$

$$DE=\sqrt{36-x^2}=\sqrt{\frac{36\times61-900}{61}}=\sqrt{\frac{36\times36}{61}}=$$

$$\frac{36}{\sqrt{61}}=36\frac{\sqrt{61}}{61}$$

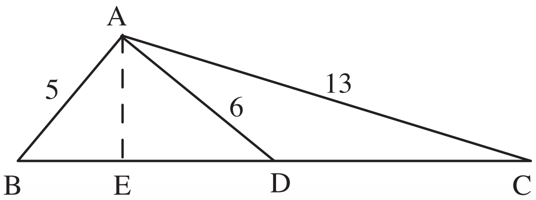
$$BD=BE+DE=25\frac{\sqrt{61}}{61}+36\frac{\sqrt{61}}{61}=\sqrt{61}$$

$$BD^2=61=AB^2+AD^2$$

∴△ABD是直角三角形，∠BAD=90°，AB⊥AD。

（此方法思路很常規，作垂直，設AE=x，利用畢氏定理建立方程，解關於x的方程，最後得到BD的長，再根據畢氏定理逆定理判斷。但是計算顯得有些煩雜，難度略大）

方法二：



作輔助線如方法一，目的就是為了求BD的長，作AE垂直於BC目的為了使用上已知的幾條邊，

設BD=a，設BE=x，則DE=(a-x)，

$CE=(2a-x)$

由畢氏定理可得，$AE^2=AB^2-BE^2=AD^2-DE^2=AC^2-CE^2$，

選取$AB^2-BE^2=AD^2-DE^2=AC^2-CE^2$其中兩個等式進行計算，不妨選擇$AB^2-BE^2=AD^2-DE^2$，$AD^2-DE^2=AC^2-CE^2$，代入得

$5^2-x^2=6^2-(a-x)^2$ ①

$6^2-(a-x)^2=13^2-(2a-x^2)$ ②

由 ① 得 $2ax=a^2-11$

由 ② 得 $2ax=3a^2-133$

則 $a^2-11=3a^2-133$

$a^2=61$

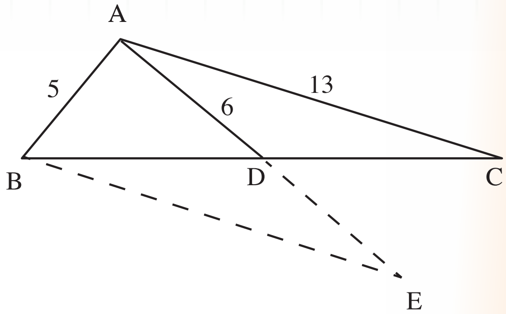
$BD^2=61=AB^2+AD^2$

∴△ABD是直角三角形，∠BAD=90°，AB⊥AD。

（此方法在第一種方法的基礎上，直接設BD ＝ a，再設了個輔助未知數BE=x，利用畢氏定理建立等量關係，解方程，當對方程組進行化簡的時候發現，可以使用整體代入法直接求出a^2，計算量不大，但在設未知數的時候，略費工夫。此處輔助未知數x作用重大，設而不求，把幾條邊之間的數量關係表示得非常清楚）

方法三：D是BC中點，已知的三條邊不在一個三角形中，考慮倍長中線的辦法

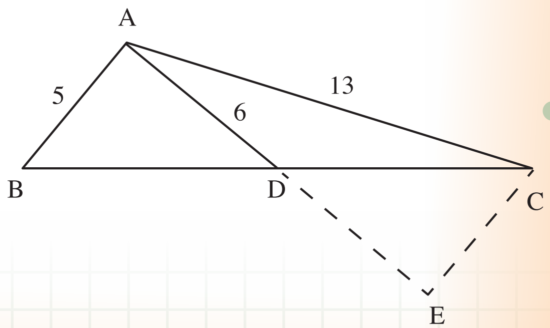
如圖



延長AD至E，使AD=DE，易證△BDE ≅△CDA，則BE=AC=13，在△ABE中，$BE^2=AB^2+AE^2$，則△ABE是直角三角形，∠BAD=90°，AB⊥AD。

（倍長中線法是典型方法，帶有一定的技巧，此方法是利用了構造全等三角形把AC轉移到了與求證有關的一個三角形中，根據畢氏定理逆定理可以判斷三角形的形狀，從而判斷出兩直線的位置關係）

此種思路還有如下輔助線的作法：



過C作CE∥AB交AD延長線於E，易證△ABD≅△ECD，CE=5，AE ＝ 2DE

$=12$，在△ACE中，$AC^2=AE^2+CE^2$，則△ACE是直角三角形，∠E=90°，

∵CE ∥ AB，∴∠E=∠BAD=90°，

AB⊥AD。

（還可以連接BE、CE變成矩形來思考）

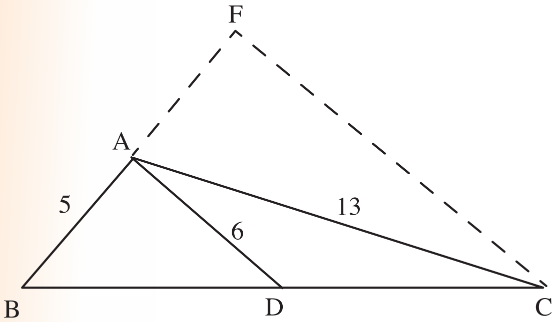
方法四：此處AB=5，AC=13，BD=6，又需要判斷直角有關的，這個三個數之間也是有些聯繫的，5, 12, 13，就是一組勾股數，可以利用構造以AD為中位線的三角形解決問題。

延長BA至F，使AF=BA，連接CF，則AD是△BAF的中位線，CF ∥ AD且CF=2AD=12，

在△AFC中，AF=5，CF=12，AC=13，所以△AFC為直角三角形，∠F=90°，

CF ∥ AD，∴∠E=∠BAD=90°，

AB⊥AD。



（根據三角形中位線的性質，平行於底邊且等於底邊的一半。平行可以轉移角，而一半或者2倍的數量關係可以轉化我們所需要的線段，這種方法在很多類似的題目中經常用到）

有老師也許會有疑問，要是教學進程還沒有講到中位線怎辦？很好辦！定義它即可（運用之妙，存乎一心）

類似的“好題”多了，我們數學教師能不能找到“好題”，並將“好題”講好，這是一個數學教師數學功底的最重要體現！要給學生一杯水，教師要有一桶水，我們反對滿堂灌，但教師要有滿堂灌的能力，教育的主要任務不僅僅是積累知識，更在於發展思維，學生的思維成長是教學的最大成功，哪怕是數學習題課，也要培養學生的思維──理性思維、辯證思維、批判性思維，習題課不是以講多題目取勝的，更不是對對答案就完事的，教師教會向會找、會教轉變，學生學會向會學、會思考轉變，數學習題課的教學才有樂趣！

問： 是嗎？

答： 不是嗎？

再答：難道不應該這樣嗎？

袁朝川

南山實驗教育集團麒麟中學數學一級教師。

鄧後軍

南山區教育局教研室中學數學高級教師，奧林匹克數學高級教練。