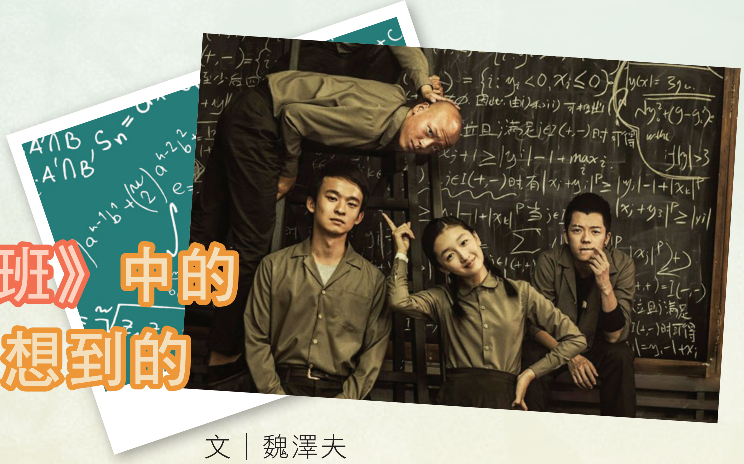

由電影《少年班》中的一個數學問題想到的

文｜魏澤夫

2016 年元旦前熱播的電影《少年班》講述了這樣一個故事：1998 年，來自西安交通大學的《少年班》導師周之庸（孫紅雷飾演），前往全國各地尋找智商超群的天才少年，最終選出了廿二名少年，其中五名天才少年被導師慧眼選中，組成了“世界數學大賽”攻關小組，經歷了早於同齡人的苦樂交織的大學生涯。

在這部影片中，導師周之庸在考察一名農村少年時提出了這樣一個問題：“有二十階樓梯，每次只能上一階或兩階，總共有多少種上法？”這位少年略加思考便道：“最高階非零子式的階數 $\leq n-2$，任何 $n-1$ 階子式均為零 …，總共有壹萬零玖佰肆拾陸種。”

由這位少年說的“最高階非零子式的階數”，可以推測他運用了高等數學中的矩陣方法，但實際上，這只是一個二階線性遞推數列問題，下面給出兩種解法：

解法 1

設有 n 階台階，每次只能上一階或兩階，共有 a_n 種上法，則踏上第 n 級台階有兩種可能：

（1）由第 $n-1$ 階台階踏上第 n 級台階，此時共有 a_{n-1} 種方法；

（2）由第 $n-2$ 階台階踏上第 n 級台階，此時共有 a_{n-2} 種方法。

由加法計數原理可得 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，設 $a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})$，其中 α,β 待定，則 $a_n=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2}$，而 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，比較兩式，令 $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=-1$，則 α,β 為方程 $x^2-x-1=0$ 兩根，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，不妨令 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，易知 $a_1=1,a_2=2,\therefore a_2-\alpha a_1=2-\alpha\neq 0,\therefore \{a_n-\alpha a_{n-1}\}$ 為等比數列，

$\therefore a_n-\alpha a_{n-1}=(2-\alpha)\beta^{n-2}\cdots(1)$，同理可得：$a_n-\beta a_{n-1}=(2-\beta)\alpha^{n-2}\cdots(2)$

$(1)\times\beta-(2)\times\alpha$ 得：$(\beta-\alpha)a_n=(2-\alpha)\beta^{n-1}-(2-\beta)\alpha^{n-1},(n\geq 2)$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}[(2-\alpha)\beta^{n-1}-(2-\beta)\alpha^{n-1}](n\geq 2)$，而 $a_1=1$ 也適合此公式，

故數列$\{a_n\}$的通項公式為：$a_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}[(2-\alpha)\beta^{n-1}-(2-\beta)\alpha^{n-1}]$

將 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 代入可得:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{3+\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\frac{3-\sqrt{5}}{2})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{6+2\sqrt{5}}{4})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\frac{6-2\sqrt{5}}{4})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}].$$

$$\therefore a_{20}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{21}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{21}]=\frac{1}{2^{21}\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{21}-(1-\sqrt{5})^{21}]$$

$$=\frac{2}{2^{21}\sqrt{5}}[C_{21}^{1}\sqrt{5}+C_{21}^{3}(\sqrt{5})^{3}+C_{21}^{5}(\sqrt{5})^{5}+C_{21}^{7}(\sqrt{5})^{7}+\cdots+C_{21}^{19}(\sqrt{5})^{19}+C_{21}^{21}(\sqrt{5})^{21}]$$

$$=\frac{1}{2^{20}}[21+\frac{21\cdot 20\cdot 19}{3\cdot 2\cdot 1}\times 5+\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5^{2}+\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5^{3}$$

$$+\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5^{4}+\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5^{5}$$

$$+\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5^{6}+\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5^{7}+\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5^{8}$$

$$+\frac{21\cdot 20}{2\cdot 1}\times 5^{9}+5^{10}]=\frac{11477712896}{1048576}=10946$$

解法 2

設有 n 階台階，每次只能上一階或兩階，共有 a_n 種上法，則踏上第 n 級台階有兩種可能：

（1）由第 $n-1$ 階台階踏上第 n 級台階，此時共有 a_{n-1} 種方法；

（2）由第 $n-2$ 階台階踏上第 n 級台階，此時共有 a_{n-2} 種方法。

由加法計數原理可得$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，故$a_n-a_{n-1}=a_{n-2}$，又$a_1=1,a_2=2$，

$$\therefore a_{20}=(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\cdots+(a_3-a_2)+a_2=(a_{18}+a_{17}+\cdots+a_2+a_1)$$

$$+a_2=(1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144+233+377+610+987$$

$$+1597+2584+4181)+2=10946$$

魏澤夫

吉林省吉林市第一高級中學校，吉林省中學特級教師。