由一個兒童趣味遊戲引發的猜想

文｜魏澤夫

“巧算24點”是一種兒童趣味遊戲，遊戲規則為：在一副撲克牌中抽去大小王，剩下52張，（也可只用1～10這40張牌），從中任意抽取4張牌，用加、減、乘、除（可加括弧）把牌面上的數算成24。每張牌必須用一次且只能用一次，例如抽出的牌是3、8、8、9，那麼算式為（9－8）×8×3或3×8＋（9－8）或（9－8÷8）×3等。

前不久，一位學生在微信群中告訴大家，她女兒最近迷上了“巧算24點”遊戲，女兒讓她從1到10之間任取四個數（可以重複選取），列印出所有的“24點”題。

這位學生粗略計算了一下，發現至少有上百種，於是她編了一道題：設口袋中有40個小球，共10種顏色，每種顏色的小球均為4個，從中任意取出4個小球，共有多少種不同的取法？

她請同學們幫助計算一下準確的結果。

微信發出之後，微信群中立刻展開了熱烈的討論，很快就有同學給出了如下解法：

1. 若取出的四個球同色，則有 $C_{10}^{1}\cdot C_{4}^{4}=10$ 種；
2. 若取出的四個小球僅有兩種顏色，則有 $C_{10}^{2}\cdot(C_{2}^{1}+C_{1}^{1})=135$ 種；
3. 若取出的四個小球僅有三種顏色，則有 $C_{10}^{3}\cdot C_{3}^{2}=360$ 種；
4. 若取出的四個小球有四種顏色，則有 $C_{10}^{4}C_{1}^{1}=210$ 種；

綜上，共有不同取法為10+135+360+210=715種。

還有同學將此解法歸納為：

$$C_{10}^1 \cdot C_3^3 + C_{10}^2 \cdot C_3^2 + C_{10}^3 \cdot C_3^1 + C_{10}^4 \cdot C_3^0 = \sum_{i=1}^{4}(C_{10}^i \cdot C_3^{4-i}) = 715$$

以上的解法都是利用了先選顏色，然後分組的分類討論思想，解答完全正確。

值得注意的是，有的同學從結論入手，他注意到$715=5\times11\times13=\dfrac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=C_{13}^4$，於是產生了一個猜測：這一類問題的最後結果都可以表示為一個確定的組合數。為了確認自己的這一猜測正確，他又分別計算了幾種簡單的情形，例如：

1. 設口袋中有32個小球，共8種不同顏色，每種顏色的小球均為4個，從中任意取出3個小球，共有多少種不同的取法？
2. 設口袋中有54個小球，共9種不同顏色，每種顏色的小球均為6個，從中任意取出4個小球，共有多少種不同的取法？

計算之後發現：其結果分別為：

1. $C_8^3 \cdot C_1^1 + C_8^2 \cdot C_2^1 + C_8^1 \cdot C_3^3 = 56 + 56 + 8 = 120 = C_{10}^3 = C_{8+3-1}^3.$
2. $C_9^1 \cdot C_1^1 + C_9^2 \cdot (C_2^1 + C_1^1) + C_9^3 \cdot C_3^1 + C_9^4 \cdot C_1^1 = 9 + 108 + 252 + 126 = 495 = C_{12}^4 = C_{9+4-1}^4.$

於是他提出了猜想：設一個口袋中有mn個小球，共有n種不同的顏色，每種小球均有m個，若從口袋中每次取出i個小球$(i \le m)$，則共有C_{n+i-1}^i種不同的取法。

怎樣證明或否定這一猜想呢？注意到在前面的特例解答中，都是利用分類討論的方法，即先取顏色然後分組，但是現在的問題不是具體的數字，因此不能完全套用解法。後來有的同學提出：可以使用“隔板原理”解釋。我就此進行了研究，現給出解答如下：

解：首先從n種顏色中任取k種顏色，共有C_n^k種取法。然後將i個小球$(i>1)$排成一排，則這些小球產生了$i-1$個空位，在這$i-1$個空位中插入$k-1$塊隔板(任何兩塊隔板不能插在同一個空位)，共有C_{i-1}^{k-1}種插入結果。這$k-1$塊隔板將小球分為k組，這k種球分別對應k種顏色，任何兩組球的顏色均不同。由乘法原理可知：k種顏色的小球取法共有$C_n^k \cdot C_{i-1}^{k-1}$種。

由加法原則可知：所求不同取法共有$C_n^1 \cdot C_1^1 + C_n^2 \cdot C_{i-1}^1 + \cdots + C_n^{i-1} \cdot C_{i-1}^{i-2} + C_n^i \cdot C_1^1$種。

下面證明：$C_n^1 \cdot C_1^1 + C_n^2 \cdot C_{i-1}^1 + \cdots + C_n^{i-1} \cdot C_{i-1}^{i-2} + C_n^i \cdot C_1^1 = C_{n+i-1}^i.$

$\because$ 由組合數的性質可知$C_n^m = C_n^{n-m}$，

$$C_n^1 \cdot C_1^1 + C_n^2 \cdot C_{i-1}^1 + \cdots + C_n^{i-1} \cdot C_{i-1}^{i-2} + C_n^i \cdot C_1^1 = C_n^1 \cdot C_{i-1}^{i-1} + C_n^2 \cdot C_{i-1}^{i-2} + \cdots + C_n^{i-1} \cdot C_{i-1}^1 + C_n^i \cdot C_{i-1}^0,$$

$\because (1+x)^n(1+x)^{i-1}=(1+x)^{n+i-1}$，將左右兩邊的二項式分別展開，並比較$x^i$的系數，

左$= C_n^1\cdot C_{i-1}^{i-1}+C_n^2\cdot C_{i-1}^{i-2}+\cdots+C_n^{i-1}\cdot C_{i-1}^1+C_n^i\cdot C_{i-1}^0$，右$= C_{n+i-1}^i$,

$\therefore C_n^1\cdot C_1^1+C_n^2\cdot C_{i-1}^1+\cdots+C_n^{i-1}\cdot C_{i-1}^{i-2}+C_n^i\cdot C_1^1=C_{n+i-1}^i$.

特別當$i=1$時，i個小球的不同取法共有$C_n^1\cdot C_1^1$種，也可以寫成C_{n+i-1}^i的形式。

由此可見：**從特殊情形入手，合情推理，大膽猜測，謹慎求證或者否定猜想**，這是科學研究的必由之路，通過“巧算24點”引發的數學猜想與討論，使我們共同經歷了一次奇妙的數學之旅！

魏澤夫

吉林省數學特級教師。2008至2011學年參與教育暨青年局的內地優秀教師來澳交流計劃。現任教於吉林市萬信培訓學校。