

“一題多解” 重要嗎？

文 | 江春蓮 余偉忠 張耀強

“一題多解”、“一題多變”、“多題歸一”是中國傳統數學教學的特點 (Cai & Nie, 2007)。北京市22中的孫維剛老師曾指出：“一題多解可以使學生身臨其境，加深理解；通過多解歸一，學生可以尋求不同解法的共同本質，乃至不同知識類別及思考方式的共性，上升到思想方法、哲理觀點的高度，從而不斷地抽象出具有共性的解題思考方法，也就是多題歸一。” Zhang, Barkatsas, Law, Leu, Seah和Wong的研究(2015)發現，中國大陸、台灣地區和香港的小學五年級的學生認為，一題多解對他們的數學學習是非常重要的。然而，我們的研



究 (Jiang, Seah, Barkatsas, & Cheong, 2016) 卻發現，澳門初中二年級的學生不認為“一題多解”對他們的數學學習很重要。為甚麼呢？根據學習機會理論，他們是否比較少地有“一題多解”的體驗呢？為此，我們試圖去尋找教案以回答這樣一個問題：澳門數學課堂教學中常常運用“一題多解”嗎？

我們把最近五年（2008-2013年）教育局的教學設計獎勵計劃獲獎的已經上網的全部初中和高中的作品（不包括那些沒有解答的教學設計）進行了統計，初中部分的結果見表1，高中部分見表2。



表1：2008-2013年間教學設計獎勵計劃初中獲獎作品中一題單解、一題多解問題數目

作品代碼	總節數	總題目數	一題單解 題目數	一題兩解 題目數	一題三解 題目數
2012-2013					
G031	8	33	33	0	0
2011-2012					
G019	10	24	24	0	0
G052	5	6	6	0	0
總數	15	30	30	0	0
2010-2011					
G027	9	6	6	0	0
G034	11	24	24	0	0
總數	20	30	30	0	0
2009-2010					
G003	57	317	315	1	1
G012	8	8	8	0	0
G028	5	10	10	0	0
總數	70	335	333	1	1
2008-2009					
G006	16	36	33	2	1
G012	10	34	34	0	0
G050	14	35	34	1	0
總數	40	105	101	3	1
總數	153	533	527	4	2

表1資料表明，在11份獲獎作品中，一共有153節課，533個帶解答的問題。在這533個問題中，只有6道題（1.13%）上，老師提供了兩個或兩個以上的解答。具體地說，只在3份教案中出現了一題多解的情形。




表2：2008-2013年間教學設計獎勵計劃高中獲獎作品中一題單解、一題多解問題數目

作品代碼	總節數	總題目數	一題單解 題目數	一題兩解 題目數	一題三解 題目數	一題四解 題目數
2012-2013						
C013	6	7	7	0	0	0
C014	146	127	123	2	1	1
C020	7	17	15	2	0	0
C026	113	367	343	20	4	0
C041	6	12	12	0	0	0
C057	6	9	9	0	0	0
總數	284	539	509	24	5	1
2011-2012						
C005	132	131	118	10	3	0
C014	7	10	10	0	0	0
C019	181	166	166	0	0	0
C069	4	7	7	0	0	0
總數	324	314	301	10	3	0
2010-2011						
C005	190	103	34	63	5	1
C016	4	2	2	0	0	0
C036	5	5	5	0	0	0
C064	18	122	114	6	2	0
總數	217	232	155	69	7	1
2009-2010						
C009	6	5	5	0	0	0
C019	199	134	132	2	0	0
C030	4	2	2	0	0	0
C059	4	12	11	1	0	0
C073	19	23	23	0	0	0
C082	52	43	43	0	0	0
總數	284	219	216	3	0	0
2008-2009						
C003	41	82	79	1	2	0
C012	101	199	197	2	0	0
C012	4	25	25	0	0	0
C025	9	87	87	0	0	0
C032	15	42	42	0	0	0
C033	12	27	27	0	0	0
C034	4	7	7	0	0	0
C045	14	31	29	2	0	0
C049	5	14	14	0	0	0
總數	205	514	507	5	2	0
總數	1314	1818	1688	111	17	2



表2資料表明，在29份獲獎作品中，一共有1314節課，其中1818道帶解答的問題。在這1818個問題中，只有130道題（7.15%）上，老師提供了兩個或兩個以上的解答。具體地說，在11份教案（37.93%）中出現了一題多解的情形。

數學教案中出現比例如此少的“一題多解”的題目，既在意料之中，又在意料之外。在意料之中，是因為知道不會多；意料之外是沒有想到這麼少。作為一個數學老師，不難發現很多的問題其實是可以有多種不同的解法。即便是很簡單的一元二次方程，如 $(2x-3)^2=4$ ，也可以用直接

開平方法、因式分解法和公式法等三種方法。同樣地，即便是很簡單的一個證明問題（圖1），也可以有多種不同的證明方法（圖2）（Cai & Nie, 2007）。在這些證明方法中，圖2(a)只用到兩線平行的同旁內角性質定理，而圖2(b)則需要增加一個平角的性質，圖2(c)則在兩線平行性質定理的基礎上增加三角形的內角和定理，圖2(d)既可以用平行線同旁內角和內錯角的性質定理，也可以用四邊形的內角和公式，圖2(e)和圖2(f)則需要用到上面提到的多項性質。通過這樣的教學，數學問題對學生來說，不再是孤立的，而是相通的，可以形成對數學知識和方法的關聯性理解（Skemp, 1986）。



如圖， $AB \parallel CD$ ，問和式 $\angle A + \angle E + \angle C$ 可能是多少？

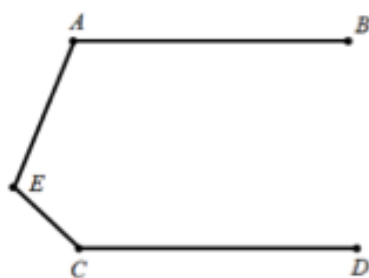


圖1

(a)	(b) F 為 AE 和 DC 的交點
(c)	(d) $AH \parallel EC$
(e) $AI \parallel EC$, $CJ \parallel AE$	(f)

圖2



【參考文獻】

Cai, J. & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. *ZDM-International Journal on Mathematics Education*, 39, 459-475.

Jiang, C., Seah, W.T., Barkatsas, T., & Cheong, I.K. (2016). What Macao students value in mathematics learning. Paper submitted to the 13th International Congress on Mathematical Education, July, 24-31, 2016, Hamburg, Germany.

Skemp, R.R. (1986). *The Psychology of learning mathematics* (2nd ed.). London: Penguin Books.

Zhang, Q., Barkatsas, T., Law, H.Y., Leu, Y.C., Seah, W.T., & Wong, N.Y. (2015). What primary students in the Chinese Mainland, Hong Kong and Taiwan value in mathematics learning: A comparative analysis. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI 10.1007/s10763-014-9615-0.

江春蓮

澳門大學教育學院助理教授

佘偉忠

澳大利亞墨爾本大學教育學院
副教授

張耀強

澳門培道中學教師