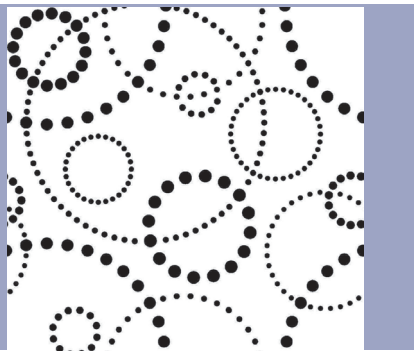




π 是錯誤的？ 挑戰圓周率

文 | 蕭仁信 張浩賢 余金翠 柯助錄



--[聊天群組] 數數數數 於 2018 年某月某日建立 --

--[群組描述]

數個數學人，細數數學事。古今中外，天南地北，方圓虛實，數數數數 (Sou3Sou3Sou2Sou3)。

--[蕭仁信]--

各位，我找到一個頗有趣的話題，可以開聊一下，相信也可作為課外材料在課堂上用。

話說源頭是我在視頻網站看到一段“Tau vs Pi Smackdown”（ τ 與 π 激戰）的視頻。^[1] 它似乎圍繞着 π 作為“常數王者”而作出的挑戰。查閱一些資料，源頭出自一篇挑戰 π 的文章“ π is wrong!”（《 π 是錯誤的！》）^[2]，以及“The Tau Manifesto”（《Tau 的宣言》）^[3] 為主的觀點引申出的一系列有趣話題。我覺得可先從以下說起。

傳統的定義，也是學校老師教的定義，我們知道任何一個圓，它的圓周 C 和直徑 D 的比值是固定的，這個固定的常數就是圓周率 π ，即

$$\pi = \frac{C}{D} \approx 3.14159\dots$$

然而作為挑戰者， τ 的倡議者認為，我們更應關注圓周 C 與半徑 r 的比值而不是直徑 D ，即

$$\tau = \frac{C}{r} \approx 6.283185\dots$$

到這裏，顯然的，兩者有關係： $\tau = 2\pi$ 。寫成這個形式，可能大家開始明白為甚麼會有這種“莫名其妙”的倡議。有不少的數學公式，甚至物理、工程等其他領域，都有出現 π 的身影，但是有沒有發現，這些公式中“ 2π ”總是黏在一起？所以，使用 τ 取代 2π 會不會是終極的、自然的表示周徑比常數的方法呢？

例如，三角學中 2π 最為常見，這是因為按照角的弧度制 (Radian) 定義，一個周角等於 2π (rad)，於是如正弦、餘弦等 2π 為周期的函數可以得到簡化。不過倡議者推崇的，是謂如果用 τ 取代 2π ，那麼其系數反而能和日常認知的轉數 (或稱圈數 / 周數，Turn) 離奇地 (還是自然地？) 配合起來。

表 1：角度、弧度、 π 、 τ 的對照表

角度 (Degree)	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度 (Radian) 以 π 表示	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
弧度 (Radian) 以 τ 表示	$\frac{\tau}{12}$	$\frac{\tau}{8}$	$\frac{\tau}{6}$	$\frac{\tau}{4}$	$\frac{\tau}{2}$	$\frac{3\tau}{4}$	τ
轉數 (Turn)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

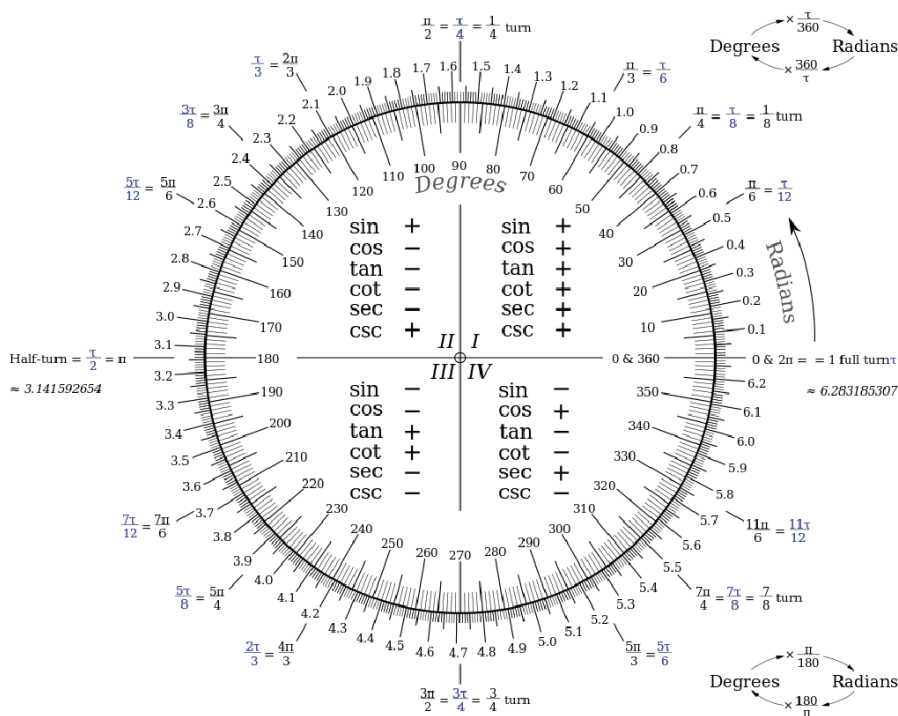


圖 1：單位圓上表示三角函數各種常量和變量之間的關係。特別在角度、弧度、 π 、 τ 等作出了清晰的表示。(開放圖源)

更有意思的是在非學術層面上的“抗爭”。大家都知道3月14日是“圓周率日”(Pi day)吧！它的由來不少文章有記載，在此就不贅述，不過主要慶祝活動就是“吃派”(π與pie同音)，而這種吃派活動就連今年某快餐連鎖店在港澳也有推廣！然而，τ的倡議者認為“圓周率日”應該改為“半τ節”(Half Tau day)；甚至應該改為慶祝6月28日的“τ節”(Tau day)云云！



圖2：慶祝圓周率日有不同的“派”(圖源自[4][5])

各位對這個話題，有甚麼高見呢？

--[張浩賢]--

第一次看這種話題，我相信大家都會嚇了一跳，然後一笑置之，心想哪個瘋子無聊打算挑戰人類千百年來發現建立的數學“真理”呢？不過我倒想為各位簡介一個數學史小故事，諸君將會發現，有時候正正是瘋狂的點子大大推動數學發展。

平行公理是我們初中一學習平面幾何時都會認識的一個公理，它出自古希臘數學家歐幾里得的《幾何原本》，表述如下：

“經過直線外一點，有且只有一條直線與這條直線平行。”

長期以來，數學家發現平行公理和其他四個公理比較起來，顯得敘述冗長，同時《幾

何原本》直到第 29 個命題中才用到平行公理推導，也就是說可以不依靠平行公理推出前 28 個命題。這讓數學家不斷爭論，平行公理是公理？還是可以靠前四個公理來證明的定理？這便是幾何發展史上最著名，長達兩千多年的“平行線理論”討論。

直到 1820 年代，俄國羅巴切夫斯基在證明平行公理的過程中，大膽嘗試走另一條路，他提出一個和平行公理矛盾的命題，用它來代替平行公理，然後與《幾何原本》的前四個公理結合生成一個新的公理系統，並展開一系列定理的推導證明。他認為如果這個新系統在基礎的推理中出現矛盾，就等於用反證法證明了平行公理。但令羅巴切夫斯基驚奇的是，在細緻深入的推理過程中，他得出一個個直覺上匪夷所思，但邏輯上毫無矛盾的命題。最後他得出兩個重要的結論：

1) 平行公理獨立於前四個公理。

2) 新的公理體系會得到一系列邏輯上無矛盾的新定理，新理論，它們和歐幾里德幾何一樣是完善、嚴密的幾何學。

這就是非歐幾何的緣起。隨着科學技術的進展，人們更發現非歐幾何比歐氏幾何更能符合宇宙的真實結構。想推翻直觀上毫無疑問的平行公理，好像是數學家無聊及瘋狂的舉動。經過二千年的探索，當我們看透平行公理的意義，竟引發出非歐幾何的概念，帶給哲學、科學與數學前所未有的衝擊。

回到開首提到的“ π 的定義”問題， π 是圓周和直徑之比的定義已有長遠歷史，但誰能判斷，對圓周率定義的討論只是無聊瘋狂的舉動？還是推動數學不斷發展的重要一步？勇於挑戰，不斷探索，對萬物常懷好奇謙卑的心，是每代每位數學家的精神，也是人類社會不斷進步的原動力。

--[余金翠]--

“ π ”相信大眾對這個符號並不陌生，即使對其有關的公式(圓、扇形、球…)、性質(弧度角的表示…)已沒有印象，但依然會記得 π 的近似值 3.14，以及每年的 3 月 14 日“Pi



日”，外國真的有些地方會於當日吃 Pie 慶祝呢！

但看了上面的材料說，原來早於十多年前，在數學界已有人質疑 π 的定義，身為數學老師的我也是現在才知道。觀乎該數學家對圓周率的新定義：圓周長與半徑的比，其值是 π 的兩倍，記號為 τ (讀音為 Tau)，並聲稱這個改變令大部分的公式或定義比以前的更為簡潔，令我對 τ 也有點心動！心動不如行動，於是就着手整理部分有關圓和相關內容的公式：

表 2：以 π 、 τ 表示公式對照表

	π	τ
定義	$\pi = \frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}}$	$\tau = \frac{\text{圓周長}}{\text{半徑}}$
圓周長	$C = 2\pi R$	$C = \tau R$
圓面積	$S = \pi R^2$	$S = \frac{1}{2}\tau R^2$
弧長 (n 是圓心角的度數)	$l = \frac{n\pi R}{180^\circ}$	$l = \frac{n\tau R}{360^\circ}$
扇形面積 (n 是圓心角的度數)	$S = \frac{n\pi R^2}{360^\circ}$	$S = \frac{n\tau R^2}{720^\circ}$

究竟新定義是否真的更好一些？這個問題正好可以在我任教的初三班中提出，他們剛好學完有關圓、圓柱和圓錐的內容的計算。在我跟他們講解新定義及隨之改變的公式後，再讓他們自行討論一會，然後叫大家進行投票。大多數的同學變成 π 的死忠，紛紛說：

“那些公式根本無變得簡單易記，為甚麼要變定義？”

“為何十幾年前提出，都無改變過？即是這個定義不好啦！”

“這新定義跟 π 只欠兩倍，又不是甚麼驚人改變，不值得因此而改變所學的…”

在一片討伐聲中，我作最後的掙扎：“大家真的不給一個機會？若我們接着的小測，大家嘗試以此新定義出來的公式來解題，好嗎？”

想當然！被同學們拒絕了。其中有個同學說：“就算我們願意學，但全世界依然用 π ，那學有何用？”

其實以上的公式，並未能體會到 π 在公式簡便的真正動人之處，但已可以理解到：為何新定義即使較佳，依舊推翻不了 π 的原因。始終我們現今在中學階段所學的數學，大部分都經過幾百年以上的洗滌，已無餘地再讓我們改變甚麼，但若能夠對那些公式、概念，多加瞭解和分析的話，我覺得對同學們在數學素養和興趣的培養方面，都會有助益的。

尚記得之前我跟這班初三的同學，也討論了不少問題。例如：為何古時的人會定義，圓周角是360度，而不是100度？1000度？又如統計學中，方差的公式 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$ 為何要這樣設計？為何要取平方？為何不能以絕對值代替平方的運算？這些問題的提出，我相信一來會加強他們的記憶，二來亦會提升部分同學的批判能力。期待將來對圓周率能有更多新的討論和發現！

--[柯助錄]--

文章所提及的只是其中一個困難，如果圓周率採用周長與半徑比值 τ 的話，就像上文一樣，也會致使許多簡潔的公式變得很“醜陋”，如：

$$\text{圓面積公式 } S = \pi r^2 = \frac{\tau}{2} r^2$$

歐拉恒等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 會變成 $e^{i\tau} = 1$ （這條難說了，有0也是很漂亮啊）

$$\text{伽瑪函數中 } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ 會變成 } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{2}}$$

$$\text{高斯積分 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ 會變成 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\tau}{2}}$$



圓周率只是人為定義的一個常數，所以我不覺得存在錯不錯的問題，千百年來世界各地對圓周的定義均相同，我相信一定有它的道理（雖然我也不知道甚麼原因），如果將圓周率改為周長與半徑比值也只是令數學上的許多與 π 有關的公式換成 $\tau/2$ 罷了。

我覺得對於教學來說，對於沒接觸過圓周率概念的學生是行得通的，學生也只是把這個定義給記下來而已；而對於早已習慣用 π 來表示圓周率的同學來說應該會有困難，用了這麼多年早已習慣，而且改用 τ 好像沒有麼比較明顯的好處。

我也向大家分享兩則與圓周率有關的小知識：

(1) 如果圓周率的十進位表達中，前 n 位恰好組成一個素數，這樣的素數就叫做 π 素數。3、31 和 314 159 都是 π 素數，下一個 π 素數則是 31 415 926 535 897 932 384 626 433 832 795 028 841。

(2) 這個網站可以查詢數字在圓周率中的位置：<http://www.1415926pi.com/getIndex.html>

[蕭仁信]

@張浩賢 浩賢老師我也是很愛非歐幾何這段史事呢！不同的是，略看數學家們的評價，大致都是一面倒的反對倡議呢！就像 @余金翠 @柯助錄 其他兩位所說，它的“美”似乎太不明顯，即使在大多數內行人也沒有發現它有價值的地方。然而，欣賞它的批判精神，讓學生也學會觀察人、事的不同角度，讓數學課添上些人文色彩，又或百年後還會突破新發現也說不定！你們覺得呢？

[注釋]

[1] Numberphile.(2012, December 14). *Tau vs Pi Smackdown* [Video File]. Retrieved from

<https://www.youtube.com/watch?v=ZPv1UV0rD8U>

[2].Palais, R. (2001). "*Pi is Wrong*" (PDF). *The Mathematical Intelligencer*. New York, USA: Springer-Verlag. 23 (3): 7–8.

[3].Hartl, M. (2010). "*The Tau Manifesto*". Retrieved from <https://tauday.com/tau-manifesto>

[4].Lassiter, L. (2017). *Celebrate Pi Day With Nashville's Best Pies*. Retrieved from <https://www.nashvillescene.com/food-drink/bites/article/20854583/celebrate-pi-day-with-nashvilles-best-pies>

[5].Chirag. (2016). "*Happy Tau Day!*". Retrieved from <http://fundacurry.com/happy-tau-day/>

蕭仁信

教育暨青年局中學教育一級教師

張浩賢

高美士中葡中學中學教育一級教師

余金翠

澳門坊眾學校數學科教師

柯助錄

聖保祿學校數學科教師