一次奇妙的數學探究之旅(簡版)

文｜魏澤夫　劉昊洋

前不久，學生劉昊洋問我這樣一道題應該怎樣解答：

已知ΔABC為銳角三角形，求證：$\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。他提出的猜想是：設$A'=\dfrac{\pi}{3}$，$B'=B$，$C'=A+C-\dfrac{\pi}{3}$，則

$\sin A+\sin B+\sin C\le\sin A'+\sin B'+\sin C'\cdots\cdots$（1），

由於$\sin A'+\sin B'+\sin C'=\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin B+\sin(A+C-\dfrac{\pi}{3})$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\sin(B+\dfrac{\pi}{6})\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 即 $\sin A'+\sin B'+\sin C'\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots$（2）。

這說明猜想是正確的，但是他不清楚接下來怎樣證明這個猜想。

我認真分析了這位學生提出的猜想，首先將其簡化為：已知ΔABC為銳角三角形，則$\sin A+\sin C\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin(A+C-\dfrac{\pi}{3})\cdots\cdots$（3），我試了幾種方法都無法證明這個不等式，於是我懷疑他提出猜想是錯的，很快我找到了一個反例：設$A=C=80^{\circ}$，則

$A+C-\frac{\pi}{3}=100^{\circ}$ ， $\sin[A+C-\frac{\pi}{3}]=\sin 100^{\circ}=\sin 80^{\circ}$ ，

$\therefore \sin A+\sin C=2\sin 80^{\circ}>\sin 60^{\circ}+\sin 80^{\circ}$ ， 因此不等式（3）不成立 。

這樣就出現了一件奇怪的事 ： 由於不等式（2）成立 ， 說明這位學生提出的猜想合理 ， 可是問題究竟出現在哪裡呢 ？ 我們對此進行了深入探討 。 這位學生談了他的想法 ： 他提出的猜想是考慮到$A+B+C=\pi$ ， 因此首先固定角B ， 這相當於減少了一個變數 ，於是在等式制約下 ，A與C此消彼長 ，由於不等式（2）恒成立 ，於是不等式（1）肯定成立 。

根據學生的這個思路 ， 我們注意到原不等式是一個輪換對稱式 ， 因此立刻意識到應首先約定$A\geq B\geq C$ ， 當指定了$B'=B$之後 ， A與C立刻成為兩個極端角 ， 這樣就回避了我提出的反例 。

經過討論之後 ， 我們共同提出了新的猜想 ： 在ΔABC中 ， 設$A\geq B\geq C$ ， 且$A'=\frac{\pi}{3}$ ， $B'=B$ ， $C'=A+C-\frac{\pi}{3}$ ， 則$\sin A+\sin B+\sin C\leq \sin A'+\sin B'+\sin C'$ 。 證明如下 ：

證明 ： 原式 $\Leftrightarrow \sin A+\sin C\leq \sin\frac{\pi}{3}+\sin(A+C-\frac{\pi}{3})$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\leq 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2}\leq \cos\frac{\left|A+C-\frac{2\pi}{3}\right|}{2}$$

討論 ： （1）當$A+C-\frac{2\pi}{3}\geq 0$ ， 即$B\leq\frac{\pi}{3}$時 ，

$$\frac{A-C}{2}-\frac{\left|A+C-\frac{2\pi}{3}\right|}{2}=\frac{\pi}{3}-C\geq 0$$ ，（否則 ， 由$A\geq B\geq C$得$A+B+C>\pi$）

（2）當$A+C-\frac{2\pi}{3}<0$，即$B>\frac{\pi}{3}$時，

$$\frac{A-C}{2}-\frac{\left|A+C-\frac{2\pi}{3}\right|}{2}=A-\frac{\pi}{3}\geq 0$$，（否則，由$A\geq B\geq C$得$A+B+C<\pi$）

$$\therefore \frac{\pi}{4}>\frac{A-C}{2}\geq\frac{\left|A+C-\frac{2\pi}{3}\right|}{2}\geq 0$$，$$\therefore \cos\frac{A-C}{2}\leq\cos\frac{\left|A+C-\frac{2\pi}{3}\right|}{2}$$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C\leq\sin A'+\sin B'+\sin C'$成立。

$$\because \sin A'+\sin B'+\sin C'=\sin\frac{\pi}{3}+\sin B+\sin(A+C-\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$（當且僅當$A=B=C=\frac{\pi}{3}$時等號成立），即

$\sin A'+\sin B'+\sin C'\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$。所以原不等式得證。

實際上，如果利用琴生不等式，還可以給出此題一個極其簡潔的證明：

證明：$\because \Delta ABC$為銳角三角形，$\therefore A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$，由於正弦函數$y=\sin x$在$[0,\pi]$上為上凸函數，$\therefore \sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，（當且僅當$A=B=C=\frac{\pi}{3}$時等號成立）。

【點評】這種證法雖然巧妙，但是所用到的知識超過了高中課本。考慮到高中課本的知識範圍，研究發現，此題還可以給出另外的兩種證法：

證法 1 ： $\because \Delta ABC$為銳角三角形，

$$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$=2\sin\frac{\pi-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\le 2\cos\frac{C}{2}(1+\sin\frac{C}{2})=\frac{2\sqrt{3}}{3}[\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}(1+\sin\frac{C}{2})]$$

$$\le\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}+1+\sin\frac{C}{2}\right)^2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}[(\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2})+1]^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}[2\cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})+1]^2\le\frac{\sqrt{3}}{6}\times 3^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

當且僅當$A=B=C=\frac{\pi}{3}$時等號成立。$\therefore \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$得證。

證法 2 ： $\because \Delta ABC$為銳角三角形，

$$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$=2\sin\frac{\pi-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$\le 2\cos\frac{C}{2}+\sin C$$ ，

設$f(x)=2\cos\frac{C}{2}+\sin C$ ，則$f'(x)=-\sin\frac{C}{2}+\cos C$ ，

令$f'(x)=0$ ，則$\sin\frac{C}{2}=\cos C$ ，$\therefore \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cos C$ ，

$\because \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，$\therefore \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}=C$ ，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$

又$f'(x)>0\Leftrightarrow \cos C-\sin\frac{C}{2}>0\Leftrightarrow \cos C>\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})$

$\Leftrightarrow C<\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\Leftrightarrow 0<C<\frac{\pi}{3}$ ，

$\therefore$當$C \in (0, \frac{\pi}{3})$時，$f'(x) > 0$；當$C \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$時，$f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$在區間$(0, \frac{\pi}{3})$上是增函數，在區間$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$上是減函數，

$\therefore f(x)$在$x = \frac{\pi}{3}$處取得極大值即最大值$f(\frac{\pi}{3}) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 得證。

【總結】第一種證法屬於利用綜合法證明不等式，儘管構思十分巧妙，但是難以想到，需要認真觀察原不等式，注意等號取得的條件及齊次輪換對稱式的特點；第二種證法用到的琴生不等式知識超過了高中課本知識範圍；第三種證法利用三角函數的值域和均值不等式，通過引入輔助角將問題轉化為關於 C 的函數，簡便易行，因而是一種基本方法；第四種證法利用函數思想，將問題化歸為函數極值問題，由於涉及到導數知識，雖然易於操作，但是證明過程略顯繁雜。

在研究結束後，劉昊洋發現：完全可以將此題結論推廣到更一般的情形，即：對於任意ΔABC，恒有 $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$，具體證明在此從略。

綜上，通過對這道不等式問題的探究，大膽猜想，謹慎求證，師生研討交流，我們得到了一個完美的結論，同時也共同經歷了一次奇妙的數學探究之旅。

魏澤夫

吉林省數學特級教師。現為吉林市萬信中學校教師

劉昊洋

吉林市第一高級中學校理科實驗班學生

（本文全文將上載至 http://www.dsej.gov.mo/cre/tmag）