數學演算法教學探討
——以二次根式的除法為例

文｜江春蓮　鍾啟華　鄭綺文　黃誠昌

演算法是數學課程的重要組成部分，小學數學的主要內容就是各種形式的數（整數、分數和小數）的四則運算，中學數學也有不少演算法的內容，如有理數、整式、二次根式等的四則運算。然而，由於數學教育界將演算法看成是程式化的死的知識，對演算法教學探討的文章除范良火教授和 Bokhove 教授（2014）的文章外極少。本文將先簡要介紹兩位教授提出的學生演算法思維發展的三個階段模型及其對應的教學策略，然後以二次根式的教學設計探討中學數學中演算法的教學。

1、學生演算法思維發展的三階段模型及其對應的教學策略

1.1 甚麼是演算法？

數學家和電腦科學家對演算法給出了相似而又略有不同的定義。數學家定義演算法是可以機械地、按部就班地執行的步驟；而電腦科學家定義演算法是解決一類問題的一般性的方法。基於這兩個定義，范良火教授和 Bokhove 教授定義演算法是如用於解決數學問題的可以按部就班地執行的固定的程式。同時，他們也指出，演算法必須具有確定性、可靠性、清晰度、有效性和一般性等五個特點。

1.2 學生演算法思維發展的三個階段及其對應的教學策略

基於布盧姆的認知目標分類學和 Säljö 的學習活動分類學，范良火教授和 Bokhove 教授將學生演算法思維發展分為如下的三個階段：

（1）知識和技能：知道演算法步驟並能在可以直接應用的情境中執行演算法；

（2）理解和領會：懂得算理並能在相對複雜的情境中運用；

（3）評估和建構：能夠判斷和比較一個演算法或多個不同的演算法的有效性和價值，建構新的演算法或將某個演算法進行推廣。

與這三個階段對應的教學策略分別是：

（1）講授、演示、練習和糾錯；

（2）解釋、證明、並幫助學生建立該演算法與相關知識之間的關聯；

（3）探究，包括有指導的探究和開放性的探究。

從認知的角度講，范教授和 Bokhove 教授提出的演算法思維發展模型是從低到高逐步提升的，但為幫助學生不僅“知其然”，還要“知其所以然”，中國教材中常從具體的例子中得出某個演算法，再舉幾個不同類型的例子説明演算法的使用，最後讓學生練習、檢測和評講。下面我們將從二次根式除法的教學出發，探討演算法教學的複雜性。

2、二次根式除法的教學

2.1 人教版教材二次根式除法部分的教學安排

A. 從具體的例子中得出演算法：讓學生分別計算$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$和$\sqrt{\frac{4}{9}}$，$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$和$\sqrt{\frac{16}{25}}$，$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}$和$\sqrt{\frac{36}{49}}$，得出 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geq 0,\ b>0)$　(1) 成立。

B. 例 1：（a）$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$；（b）$\sqrt{\frac{3}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{18}}$ · 這裡的例子用來説明公式從左到右的使用。

C. 例 2：（a）$\sqrt{\frac{3}{100}}$；（b）$\sqrt{\frac{75}{27}}$ · 這些例子用來説明公式從右到左的使用。

D. 例 3：（a）$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$；（b）$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$；（c）$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}}$，這三個例子是公式的综合、靈活運用。

E. 從例 3 中 3 個例子的最後結果總結出最簡二次根式的兩個特點：（1）被開方數不

含分母；（2）被開方數中不含能開得盡方的因數或因式。這兩個特點中不包含第三點：（3）分母中不含二次根式。

F. 最後是應用例子：設長方形的面積為 ，相鄰兩邊長分別為 a，b，已知$S=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{10}$，求 a。

2.2 二次根式除法部分的教學要求

從上面的例題我們不難看出本節課的教學目的是學會運用公式（1）計算二次根式的除法或商的開方，並懂得二次根式化簡後的結果應該是最簡二次根式。

教材中指出了最簡二次根式具有的兩個特點，但沒有明確提出第三個特點。如果沒有第三個特點，例 3 的第一個就不需要做任何的計算。

從這裡可以看出，對二次根式的除法的教學要求要達到范教授和 Bokhove 教授提出的前面兩個層次，並能運用公式（1）和分式的基本性質將最後的結果化成最簡二次根式的形式。

3、教學探討

3.1 孰先孰後

公式（1）從左到右是計算根式的除法，將其轉化為根號內的數的除法運算；其從右到左則是求分數 9/6 的平方平方根，哪一個對學生來説更簡單一點呢？因為有之前學習的開平方作基礎，所以後一個應該更簡單一些。

由此，作為教學第一步，我們可以讓學生先計算：$\sqrt{\frac{4}{9}}$ 和 $\sqrt{\frac{36}{49}}$ 等，讓他們自己總結得到開方的結果$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geq 0,\ b>0)\quad(2)$，繼續運用該方法求$\sqrt{\frac{3}{100}}$和$\sqrt{\frac{100}{3}}$，並討論甚麼樣的結果是最簡的（分母中不含根號）。

這裡讓學生計算$\sqrt{\frac{4}{9}}$ 和 $\sqrt{\frac{36}{49}}$ 等，用的是問題教學法，沒有把兩個結果拿出來讓學生作比較，認知要求略高。這種基於問題的探究，好像也不難，與第二階段的綜合、靈活應用相比，很難說它在一個更高的層次。

第二步再討論該公式的逆用，逆過去看就是根式的除法，可以轉化成數（或式）的除法的開方運算，這時可以用例 1 和例 3。

另外，計算$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$也可以先運用分式的基本性質，將其變成$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$，轉化成根式乘法，建立乘除法之間的關係。

事實上，在例 3 裡，學生不僅是單純地運用公式，還要用到根式的乘法和分式的基本性質，這種要求，似乎超出了第二水準。隨著學生年級的提升，所學知識逐漸增多，知識之間的關聯也漸趨複雜，第二水準是否需要再細分？這些都是值得探討的問題，拋出來，希望能引起老師們的思考和討論。

3.2 公式的證明

教材上公式（1）的推導，對$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$ ，學生可以對分子和分母分別開方，得到$\frac{2}{3}$；而對$\sqrt{\frac{4}{9}}$，學生則需要從檢驗 $(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}$，得到 $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$。因為它們都等於$\frac{2}{3}$，所以它們相等。

而該公式的形式化證明至少有兩種思路，一種是證明$(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2=\frac{a}{b}$，再根據平方根的概念得到$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$。一種是證明$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a}$，再根據乘除法之間的互逆關係，將其轉化為$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$。這兩種證明，與上一段的驗證有很大的不同，如何讓學生信服呢？恐怕我們需要加些類似的說明。

4、總結

本文作者以二次根式的除法為例，探討數學中演算法的教學。這裡我們不僅討論了演算法的推導設計，還討論了例題的設計和編排，以及最簡二次根式的三個特點，老師們可以仿照本文設計二次根式乘法的教學等。

參考文獻

Fan, L., & Bokhove, C. (2014). Rethinking the role of algorithms in school mathematics: a conceptual model with focus on cognitive development. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 46*(3), 481-492.

人民教育出版社（2014）。*義務教育教科書數學八年級下冊*。北京：人民教育出版社。

江春蓮

澳門大學教育學院助理教授

鍾啟華

利瑪竇中學教師

鄭綺文

聖公會(澳門)蔡高中學(分校)教師

黃誠昌

聖公會(澳門)蔡高中學(分校)教師