解題教學中如何導引出學生的不同想法？
——基於三則教學案例所引發的感想與體會

文｜徐彥輝

摘要：“一題多解”有助於學生加深對知識的理解，培養發散性思維能力，調動學習的興趣和培養主動探究的精神。但在教學實施中教師有時很難導引出學生的不同想法。基於此，本文基於三則教學案例及分析，提出導引出學生不同想法的兩點感想與體會，即：1. 應營造寬鬆、民主、探究的課堂氛圍，因利誘導地激發學生探索的數學意識。2. 應促使學生對解題進行綜合反思，力求選擇最優最簡的解法。

“一題多解”是中國數學教學的優良傳統和特色之一，“一題多解”在我國數學教學中有著舉足輕重的地位。所謂“一題多解”就是指從各個不同的角度，運用不同的知識，沿著不同的途徑，採用不同的方法解同一道習題。“一題多解”要求從各種不同角度認識事物，在廣闊的知識背景下思考問題，符合創造性思維規律，有助於培養學生的發散性思維，感受事物之間的聯繫。教師引導學生進行“一題多解”，既可以檢查學生對之前所學的概念、定理、公理的熟悉掌握程度，又能在此基礎上進一步培養學生對基礎知識和基本技能的靈活運用，有助於提高學生思維的積極性，使學生積極主動地參與到數學思考中來，引發學生對學習數學的興趣；有助於提高學生數學思維的靈活性，拓寬學生的思路，使學生能站在不同的視角，多角度、多方位去分析解決問題，促進學生發散思維和創新思維的發展。正如王千所指出，“一題多解”在數學教學中有著獨特的教育功能，即：（1）加深對知識的理解，滲透數學思想方法；（2）提高思維能力，培養創新意識；（3）調動學習的興趣，培養主動探究精神。[1]“一題多解”有利於培養學生的發散思維和探究精神，但在課堂教學實踐中，許多教師常常難以導引出學生的不同想法，迫切希望能得到有效的策略指導或有實際的經驗可供借鑒，為此，筆者將寫出自己親身經歷的三則教學案例，並談談自己的一點體會，希望能給大家以借鑒和啟示。

1. 三則教學案例及其分析

例 1：求函數 $y=\dfrac{ax-1}{a^2x^2+2}$ (a $\neq$ 0) 的最大值與最小值。

筆者在黑板上寫完這個題目，就問學生是否能解答出這個問題？過了一會兒，有學生說自己運用整體代換（換元法）和均值不等式解答了這個問題 (即解法 1)。

解法 1：令 $t=ax-1$，則 $y=\dfrac{t}{t^2+2t+3}=\dfrac{1}{t+\frac{3}{t}+2}$. 則

(1) 當 $t>0$ 時，則 $y=\dfrac{1}{t+\frac{3}{t}+2}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{3}+2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$。

(2) 當 $t<0$ 時，則 $y=\dfrac{-1}{-t-\frac{3}{t}-2}\geq\dfrac{-1}{2\sqrt{3}-2}=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$。

(3) 當 $t=0$ 時，則 $y=0$。

所以，所求最大值為 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$，最小值為 $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$。

做完解法 1，筆者問學生是否還能想到不同的解法？學生們剛開始說想不到。筆者啟發他們，是否可以把 y 看成常數，寫出關於 x 的一元二次方程？很快，就有學生得到了解法 2。

解法 2：由 $y=\dfrac{ax-1}{a^2x^2+2}$ 得 $a^2yx^2-ax+2y+1=0$，則 $\Delta=a^2-4a^2y(2y+1)\geq 0$，即 $8y^2+4y-1\leq 0$，解得 $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\leq y\leq\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$，所以，所求最大值為 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$，最小值為 $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$。

做完解法 2，筆者又問學生是否還能想到不同的解法？學生們剛開始時還是搖頭。筆者啟發他們觀察 y 的運算式，看看能聯想到甚麼？這時，有學生說聯想到直線的斜率公式。筆者肯定他的想法，鼓勵他繼續做下去，很快就得到了解法 3。

解法 3：題目的結構像斜率公式，故取 $A(a^2x^2, ax)$，$B(-2, 1)$，則 A 在拋物線 $y^2=x$ 上，問題轉化為求拋物線上動點 A 與定點 B 的連線的斜率的最大值與最小值。

設過 B(-2，1) 的直線方程為 $y=k(x+2)+1$，代入拋物線方程 $y^2=x$ 得 $y^2-\frac{1}{k}y+(\frac{1}{k}+2)=0$，則 $\Delta=\frac{1}{k^2}-4(\frac{1}{k}+2)\geq 0$，解得 $-\frac{1+\sqrt{3}}{4}\leq k\leq\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，所以，所求最大值為 $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，最小值為 $-\frac{1+\sqrt{3}}{4}$。

例 2：(1994 年全國數學高考文科試題) 設數列｛a_n｝的前 n 項和為 S_n，若對於所有的正整數 n，都有$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，證明：｛a_n｝是等差數列。

筆者在黑板上寫完這個題目，就問學生是否能解答出這個問題？過了一會兒，有學生說自己證出了這個命題 (即證法 1)。

證法 1：當 n ≥ 1 時，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，

當 n ≥ 2 時，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}-\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$，則

$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}+\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}-n(a_1+a_n)$，即

$2(a_{n+1}-a_n)=(n+1)(a_1+a_{n+1})+(n-1)(a_1+a_{n-1})-2n(a_1+a_n)=(n+1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}-2na_n$,

即$2(n-1)a_n=(n-1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}$，即 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$，即 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$。證畢。

做完證法 1，筆者又問學生是否還能想到不同的證法？過了很長時間，學生都沒有反應。於是，筆者嘗試啟發學生的思路，問是否可以運用等差數列的通項公式證明此題？又過了一些時間，終於有一個學生說自己證出了這個命題 (即證法 2)。

證法 2：令$d=a_2-a_1$，下面用數學歸納法證明$a_n=a_1+(n-1)d$。

(1) 當 n=1 時，$a_1=a_1+(1-1)d$。即當 n=1 時，命題成立。

當 n=2 時，$a_2=a_1+(a_2-a_1)=a_1+(2-1)d$。即當 n=2 時，命題成立。

(2) 假設當 n=k 時，命題成立。即 $a_k=a_1+(k-1)d$。

則當 $n=k+1$ 時，$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\dfrac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}-\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}$。即

$$(k+1)(a_1+a_{k+1})=2a_{k+1}+k(a_1+a_k)=2a_{k+1}+ka_1+k[a_1+(k-1)d]=2a_{k+1}+2ka_1+k(k-1)d,$$

即 $(k-1)a_{k+1}=(k-1)a_1+k(k-1)d$，即 $a_{k+1}=a_1+kd$。即當 $n=k+1$ 時，命題成立。

綜合 (1)、(2)，即原命題得證。即 $\{a_n\}$ 是等差數列。

做完證法 2，筆者又問學生是否還能想到不同的證法？這時，突然有一位學生說自己也找到了一種證法，我請他說說 (即證法 3)。

證法 3：當 $n \geqslant 2$ 時，$a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}-\dfrac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$，變形 $(n-1)a_{n-1}-a_1=(n-2)a_n$，

而為了證明 $\{a_n\}$ 是等差數列，只須證 $(1, a_1)$，$(n-1, a_{n-1})$，(n, a_n)3 點共線，寫成表達式就是 $\dfrac{a_n-a_1}{n-1}=\dfrac{a_{n-1}-a_1}{(n-1)-1}$，只需將上式兩邊同時減去 $(n-2)a_1$ 即得證。即

$$\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{a_{n-1}-a_1}{n-2}=\cdots=\frac{a_3-a_1}{2}=\frac{a_2-a_1}{1}。$$

筆者問他是怎麼想到這種證法的？他說："由於不好直接從通項公式推導出 $\{a_n\}$ 是等差數列，但推導出 $(n-1)a_{n-1}-a_1=(n-2)a_n$，使我想到從另一個角度證明 $\{a_n\}$ 是等差數列，即想到如上證明。" (此時，教室裏響起了熱烈的掌聲 !)

例 3：已知 $n \in N^*$，求證：$\dfrac{1}{n+1}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}) \geq \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{2n})$。

筆者在黑板上寫完這個題目，就問學生是否能解答出這個問題？過了很長時間，學生都沒有反應。於是，筆者嘗試啟發學生的思路，問是否可以運用分析法證明此題，即通過從所要求證的結論出發，步步推求使之能成立的充分條件 (或充要條件)，直至歸結到已知條件為止。一個學生從要證明的結論出發一步一步推導，最終得到了自己的解答。即：要證原不等式成立，即只要證

$$n(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})\geq(n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n})，$$

即只要證 $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+n(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})\geq(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n})+n(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n})$，

即只要證 $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+n(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})\geq\frac{n}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n})+n(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n})$，

由 $\frac{n}{2}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$ 即得證。

這位學生剛講完，又有同學說自己也有一種不同的證法，我請他說說。

學生 2：(1) 當 n 為奇數時，很容易證得：

$$\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{2n-1})>\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{n}),\ \frac{1}{n+1}(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3})>\frac{1}{2n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}),\ \frac{1}{n+1}(\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-5})>\frac{1}{2n}(\frac{1}{3}+\frac{1}{n-2}),$$

…………………………………………………………………………………………

$$\frac{1}{n+1}(\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n+6})>\frac{1}{2n}(\frac{1}{\frac{n+1}{2}-3}+\frac{1}{\frac{n+1}{2}+3}),\ \frac{1}{n+1}(\frac{1}{n-4}+\frac{1}{n+4})>\frac{1}{2n}(\frac{1}{\frac{n+1}{2}-2}+\frac{1}{\frac{n+1}{2}+2}),$$

$\frac{1}{n+1}(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n+2})>\frac{1}{2n}(\frac{1}{\frac{n+1}{2}-1}+\frac{1}{\frac{n+1}{2}+1})$，$\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n2}\times\frac{1}{\frac{n+1}{2}}$ 以上各式相加即得證。

(2) 當 n 為偶數時，同理可證。

筆者請他講講自己是如何想到這種方法的？學生 2 說由高斯求和想到的，但在具體實施時剛開始遇到了一些麻煩，後來，經過分奇偶討論和具體分析，最終解決了這個問題。(此時，教室裏響起了熱烈的掌聲 !) 突然，學生 3 也說自己想到了一種更簡單的證法，我請他說說。

學生 3：令 $x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$, $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$, 則

$$x+y=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n},\ x-y=x+y-2y=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}，$$

則要證原不等式成立，即只要證 $\frac{1}{n+1}x\geq\frac{1}{n}y$ 成立，即只要證 $x-y\geq\frac{1}{n}y$ 成立，而由 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n})$，即得證。

筆者問他是怎麼想到這種簡便解法的？他說：“我發現 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ 和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$ 這兩部分分別是奇數的倒數和和偶數的倒數和，於是，我想做把它們看作一個整體，利用整體代換法，很容易想到將這兩個相加和相減，就得到了這種證明的方法。”(教室裏再次響起了熱烈的掌聲！)

2. 幾點感悟與體會

對於數學教師而言，解題教學中導引出學生的不同想法是一項非常重要的教學策略，在解題教學中起到特殊的作用。目前，導引出學生的不同想法在實際的解題教學過程中還存在著許多問題，如課堂時間不充分，題目挖掘不深入，學生難以產生自己的想法等諸如此類的問題。但為了充分發揮導引出學生不同想法的效益，我們應充分瞭解學生的學情，把握好其開展的時機，注意解題思路的導入、分析、比較和創新。

1. 應營造寬鬆、民主、探究的課堂氛圍，因利誘導地激發學生探索的數學意識

數學學習是知情合一的學習，真正的數學教學不是讓學生在課堂中反復練習，而是讓學生萌發探索的意識與熱情。從古至今，大數學家無一例外採用的都是這樣的學習方式。教育家布魯納也指出：“探究是數學的生命線，沒有探究，便沒有數學的發展。”數學是一門用知性文字，表達人類內在的學問與藝術，所以數學教育的任務，應是啟發學生內心的數學意識。[2] 教師在課堂中的關鍵，是要充分尊重每一個學生，為學生創設情境、啟迪思維和引導方法，放手讓學生自主探索，鼓勵學生大膽地說出自己的想法，激發學生內心的數學意識。

在教學中，教師可以常常使用以下用語來誘導學生：想想看這道題還有沒有其他的解決方法？你們是否還有不同的解題思路或更簡單的方法等等。教師要引導學生往深處想，不要淺嘗輒止，教師的提問和引導，應努力推動學生達到新的理解水準，啟發新的視角——生成新的東西。教師要精心提煉出適合學生能力、發展要求並能啟迪學生思維的關鍵性問題，通過巧妙地引導和點撥，使學生的興趣和思維的聚焦點，凝結在這些內容和問題上。教師要有意識抓好在思路探求方面的引導作用，激發或引導學生的思路，特別要突出教師在思考問題時，思維的轉換調整過程，要根據學生的具體

情況，對學生的思路進行選擇、重建和整合，深入發掘、積極引導。

教師應該用變化的、動態的、生成的觀點來看待課堂教學，著力建構開放和諧、動態生成的課堂。根據師生、生生互動的情況，因勢利導，創造性地組織起適合學生參與、自主、創新的教學活動，讓學生在獲取知識的同時，產生自己的學習經驗，獲得豐富的情感體驗，使凝固的課堂場景充滿活力。良好的數學課堂，需要有學生的積極參與，在教師的引導下，讓學生經歷“火熱的思考”，如此，學生方能體會數學知識形成的過程和方法之優美，體驗成功的喜悅。

教師要做好方法和知識點的引導與啟發，讓學生明白解題思路的“來龍去脈”，感悟某些思想方法的運用，從而使學生有方向、有目標地解決問題。教學中教師千萬不要一下子把解題思路全盤托出，而是要通過啟發式的教學方式培養學生去探索、去研究、去發現。同時，教師在學生解題的過程中，還要真心實意地傾聽每一個學生的發言，發現他們思想和思維的閃光點，將學生的數學思維帶上一個更高的臺階，這樣效果會更佳。

2. 應促使學生對解題進行綜合反思，力求選擇最優最簡的解法

一堂努力導引出學生不同想法的解題教學課，常常需要融合許多數學思想方法以及解題技巧，還有數學知識內容之間的前後聯繫。一道題可能有十幾種不同的解法，學生常常會有疑問：面對甚麼樣的問題適用於這種方法呢？一句“具體問題，具體分析”是無法解答學生疑惑的，下次遇到類似的問題學生常常還是無從下手。為此，教師可以在學生所想到的方法或解題方向上，基本呈現出來之後，開始講評這些方法的產生和發展過程；講這些方法的相通之處和不同之處；講今後再遇到類似的問題時，我們所應該選用的最佳方法；講學生還沒有發現的方法；同時，結合黑板上的書寫，點評學生最初的想法、當前的想法與最佳的想法。在導引出學生不同想法的教學實施過程中，教師既要考慮到方法的多樣性，又要注重提煉和概括；既要發展學生的發散思維，又要有選擇的實施；既要形成思維的靈活性，又要有思維的批判性。

教師在努力導引出學生的不同想法時，既要教知識、講方法，更要教思考，尤其要

教學生從數學家的角度思考。這就要求教師要有一種提煉、總結和反思的精神。波利亞曾說：“如果沒有了反思，他們（指學生）就錯過瞭解題的一次重要而有效益的方面。”[3] 導引出學生的不同想法固然重要，但總結、歸納與反思則起著更關鍵性的作用，否則，學生常常會食而不化，徒有“一題多解”的形式。在導引出學生的不同想法之後，教師應帶領學生繼續走進題目，仔細審視題目中的關鍵資訊與基本特徵，努力從各種不同的解法中尋求最優的方法簡便的解答，並思考：各種解法中分別蘊含了哪些數學思想方法？不同的解法分別適用於具有怎樣特徵的題目？如何解題才能更高效？總之，對於一道題學生給出的不同解法，要通過反思階段做到舉一反三、觸類旁通，要理解各種方法的本質以及不斷尋求最優的解法，以達到真正培養學生的發散思維、探究和創新能力。

參考文獻

[1] 王千 (2004)。如何認識一題多解的教育功能 [J]。**數學通報，9**，10-12。

[2] [日] 岡潔著 (2019)。**春夜十話：數學與情緒 [M]**(林明月譯)。北京：人民郵電出版社。

[3] [美] 波利亞 (Polya, G.) 著 (2002)。**怎樣解題：數學教學法的新面貌 [M]**(塗泓，馮承天譯)。上海：上海科技教育出版社。

徐彥輝

浙江溫州大學數理學院副教授