

警惕數學習題中的偽問題


文 | 黃炫冠 李嘉敏




無論是老師還是學生，面對各種各樣的問題時，往往發現一些偽問題。甚麼叫“偽問題”呢？我們不妨把那些既沒有明確標準答案、又沒有討論意義或價值的問題稱之為偽問題。

一般來說，數學習題中都會有明確的最終答案，哪怕這個答案是以某些前提條件下才成立或者有多個答案，這是正常並且允許的，但偽問題並不適用於這種情形，偽問題的本質是“這個問題不該這麼問，問了不會得到良性的解答，即使強行解答也不會有意義”。數學練習冊中偶爾會有一些偽問題，學生有時會因這些偽問題而有所困惑，所以作為數學老師必須對這些偽問題提高警惕。

以下為若干偽問題的例子。

 例 1：下列哪些數是二次根式？

1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{4}$ 3. $\sqrt{5}$ 4. 3 5. $-\sqrt{3}$

 分析：這不是一道好題目。按照根式定義 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ ， $\sqrt{4}$ ，符合二次根式的標準，那此時 $3 = \sqrt{9}$ ，那是不是又能作類似討論？事實上，這種問題沒有甚麼討論意義，對於學生的思維並沒有幫助，反而容易浪費時間。類似的情況還有下面的例 2。



例 2：下列哪些函數是指數函數？

1. $y = 2^x$ 2. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 3. $y = (-2)^x$ 4. $y = 3^{2x}$



分析：按書本定義，形如 $y = a^x$ 叫指數函數， $y = 3^{2x}$ 不符合此形式定義，但它依然是指數型函數，沒有必要糾結於這種細枝末節。這種題目也是典型的偽問題。



例 3：已知 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ ， C 與 D 是對應頂點，那麼下列結論中錯誤的是哪一選項？

- (A) $\angle A = \angle B$ (B) $\angle AOC = \angle DOB$ (C) $AC = DB$ (D) $AO = DO$



分析：由全等三角形的結論可知，選項 A、B、C 必然正確，選項 D 應該是 $AO = BO$ ，但細心一想，D 項結論事實上無法判斷是否正確，但不能就此下結論 D 項是錯誤的，如果這是個等邊三角形呢？這是出題者可能沒有考慮周全的失誤，可見題目本身設置並不科學，改為哪一項可能錯誤或者更好。



例 4：如圖 1，已知 $AE = CF$ ， $AE \perp BD$ ， $CF \perp BD$ ，若要使用 ASA 來證明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，則還要添加下列哪一項條件？

- (A) $AB = CD$ (B) $\angle BAE = \angle DCF$ (C) $BE = DF$ (D) $\angle ABE = \angle DCF$

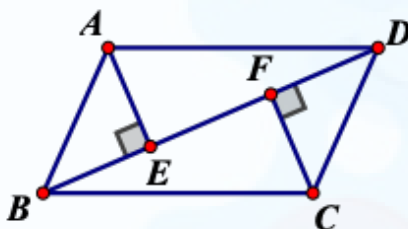


圖 1



分析：A 項是直角三角形的 HL 判定法則，B 項可用 ASA 來證明，C 項只能用 SAS 證明，D 項可用 AAS 直接證明。看起來題意是要我們選 B 項，但問題在於，D 項也可以利用三角形內角和定理進而用 ASA 證明，儘管這種證明思路並不是最直接，但不能否認這確實是可行的辦法，不排除學生也會這樣思考。因此這也是“偽命題”，表面上需不符合題意，但邏輯上卻是正確的。這類題目有時危害很大，容易給學生帶來不必要的困惑。



例 5：從 $1, 2, 3, \dots, 9$ 中，每次取出 2 個數分別作為對數的底數和真數，可得到多少個不同的對數值？



分析：看起來題目意思明確，不過問題在於 1 並不能作為對數的底數，也就是說每次取出的數並非都有意義。但題目的表述似乎並沒有考慮到這一點，當然不排除出題者刻意考察學生關於對數的理解。然而作為題目表述，如果在排列組合下進行選取，應該盡可能保證“每次取出”的結果都是有意義的。

總的來說，雖然出題者對於中學數學比較了解，但不排除出題者擬定的某些問題並沒有價值，或者存在不易察覺的歧義甚至錯誤。另外如果出題者有時過於執著於對某些數學定義的考查，反而容易落入了偽命題的怪圈。數學固然是依賴於各種定義的公理化體系，但這種體系更適合在嚴格依賴於公理化體系的大學數學中考查，比如定義了某種運算的空間是不是向量空間，是不是拓撲空間，是不是群等等。但在中學這種階段，學生有基本認知就好，就沒必要在是不是根式、是不是指數函數這些細節上矯枉過正。

期待通過上述例子拋磚引玉。筆者經驗是出題時有必要提前把關，避免學生在平時練習或測驗考試中出現這些偽問題。🍵

黃炫冠

澳門大學附屬應用學校數學科組長

李嘉敏

澳門浸信中學數學科教師