高中數學教學中的多維解題教學研究——以三角函數教學為例

文｜鄭乃春

多維解題能力是高中學生必須具備的一種能力，需要學生從不同角度去思考才能找到正確的解題思路，對學生的多維解題能力有較高的要求，只有具備了這一能力才能保證和提高數學學習成績。筆者以任教學校高中三角函數教學為例，通過公式的變形與逆用、升冪與降冪、代入法求解的研究，希望能夠對高中數學教學提供一些幫助和啟示。

1. 公式的變形與逆用

在三角函數的解題中，變形與逆用是常見的方法，因為在考察這部分知識點的時候，題目不會如教材上的內容那樣簡單，常用的方法就是將公式進行變形以後的進行考察，所以在解題的時候， 教師應該將公式的變形與逆用作為一種主要解題思路。在這一過程中，關鍵點是教師如何引導學生將所學的三角函數的相關公式進行靈活變形，同時在公式變形中還需要靈活的逆用，這樣才能在給定的條件中找到解題思路。

案例 1： 求 $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$ 的值

在解題時候教師可以提醒學生先使用常規的方法進行教學，也就是二倍角的公式，在此基礎上使用互餘轉化進行解題。在教學的過程中，教師可以先引導學生回歸一下二倍角的公式及其變化，在此基礎上在分析此題的解題思路。

原式 $= \dfrac{1}{2}\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

$$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{16}$$

從這一解題過程中可以看出，這種常規的解題思路相對來說比較複雜，主要考察的是公式的轉化，如果說學生的公式轉化不熟練，很難解答，但是過於複雜的解題過程，稍有不慎就可能出現錯誤 。在這種情況下，可以引導學生是否可以有更加簡單的解決方法，教師可以給予學生的一些提示，一些轉化公式的逆向推導等。學生稍加思考就可以想到公式：

$$\sin\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$$

原式 $=\frac{1}{2}\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$

解題可以發現，題目的要求是求：$\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$ 的值，求解可以轉化為：

$$=\frac{\sin 20^\circ}{2\cos 10^\circ}\cdot\frac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ}\cdot\frac{\sin 140^\circ}{2\cos 70^\circ}$$

同時， $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ,\sin 100^\circ=\cos 10^\circ,\sin 140^\circ=\cos 50^\circ$

所以，原式經過的轉化以後可以得到：原式 = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

對比這兩種不同的解題方式可以明顯看出，兩種思路運用的解題方法有著本質的不同， 前者是公式的轉化運用，後者則是公式的逆向推倒及轉化，前者的解題步驟比較複雜，後者在解題的時候需要注意各種公式之間的轉化，尤其是公式的逆向轉化，這一點對學生來說要求比較高，在教學的過程中對學生的公式理解和靈活應用能力要求比較高。當然，在多維解題當中，學生的思維是有一定限制的，教師在教學中應按需要進一步拓展學生思維，引導學生思考第三種解法的可能。比如說換元法，這種方法在高中數學解題當中雖然多有應用，但站在學生的角度而言，很難從給定的條件中走出來，通過換元的方式來找到新的解題思路。教師在教學中可以針對這一方面進行教學設計，比如說如何在這一題中進行換元找到思路，以下具體設計就應用到其它方面的函數知識。

令 $x=\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$

$y=\cos 10^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ$

可得：$x \cdot y = (\sin 10^\circ \cos 10^\circ)(\sin 50^\circ \cos 50^\circ) \cdot (\sin 70^\circ \cos 70^\circ)$

$= \frac{1}{8} \sin 20^\circ \sin 100^\circ \sin 140^\circ$

$= \frac{1}{8} \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$，將前面的$y$代入其中，可得

$= \frac{1}{8} y$，則 $x = \frac{1}{8}$，可得原式 = $\frac{1}{16}$

可以看出，使用換元法進行解題對學生的思維靈活性要求較高，在整個解題的過程教師需要引導他們將所學的函數知識與三角函數知識結合起來，這一點需要鍛鍊和提高學生的思維轉化能力。

2. 升冪與降冪

升冪與降冪是高中數學中的一個重要知識點，但是在高中數學的考察中，很少對這部分知識點進行單獨考察，一般情況下需要將升冪與降冪的知識點與其它方面的知識點結合起來進行考核，通常情況下只是將升冪與降冪作為其它知識點解決的一個重要思路和方法，比如說升冪與函數知識點結合運用，升冪與三角函數知識點結合運用。在解題中可以看出，給定的條件當中有數值呈現出不斷上升的趨勢，在這種情況下可以考慮是否可以通過升冪或降冪的知識點找到新的解題思路。三角函數、升冪與降冪相關知識點如下：

$$\text{升冪}\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\text{降冪}\begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \\ \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

以上是一個比較簡單的升冪、降冪和三角函數的題目，探討和説明二者結合運用的時候需要注意的問題。

案例 2： 求 $\dfrac{3-\sin 70^{\circ}}{2-\cos^{2} 10^{\circ}}$ 的值

在這道題目的解題中，教師應該要求學生分別運用升冪和降冪兩種方式進行，先讓學生使用升冪解題，具體的解題過程如下。

原式 $=\dfrac{3-\left(2\cos^{2} 10^{\circ}-1\right)}{2-\cos^{2} 10^{\circ}}=\dfrac{4-2\cos^{2} 10^{\circ}}{2-\cos^{2} 10^{\circ}}=2$

可以看出，升冪的解題過程還是比較簡單的，在升冪之外，教師可以讓學生在升冪解題的基礎上，運用降冪的方法進行解題。具體的解題過程如下。

原式 $=\dfrac{3-\sin 70^{\circ}}{2-\dfrac{1+\cos 20^{\circ}}{2}}=\dfrac{3-\sin 70^{\circ}}{\dfrac{3-\sin 70^{\circ}}{2}}=2$

通過這個對比式的解題過程，學生可以體會到運用升冪和降冪解題過程中的差異，如果能夠多設計一些類似的題目，學生在遇到升冪或者降冪題目的時候，如果説升冪無法解決問題，就會想到降冪解題的思路，這就是解題維度的變化。當然，在具體講解的過程中，除了與三角函數結合分析之外，也需要與其它函數知識等結合起來運用。

3. 代換法

代換法也是一種比較常見的解題方法，這種方法主要適合比較複雜的問題，且題目中包含著兩個或以上的未知條件，題目難度相對比較大的情況下，學生可以採用此種方法進行嘗試，其基本要求就是把其中的一個條件轉化為另外一種條件，或者將題目中的問題轉化為另外一種文體，在相對比較複雜的題目中可以在眾多的條件中找到新的解題思路。有關三角函數中，涉及代換法的應用主要集中在 $\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha=1$ 進行 1 的代換，或者使用萬能公式進行代換，這些需要在教學中針對學生的不足進行專項練習。

案例 3： 已知$\tan\alpha=3$，求$\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+1$的值。

在多維解題教學中，可以讓學生先嘗試使用“1”代換進行解題，代入後可得：

$$=\frac{2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{2\tan^2\alpha-3\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=1$$

當然，這只是簡單介紹的其中一種情況，在教學當中可以引導學生使用不同的代入法來求解，讓學生逐一去嘗試，即便是一種代入法無法解出正確的答案，也可以從中獲得一些解題的體驗和啟示。

教師在教學中可以對題目進行適當的調整和變化，側重於學生思維能力的考察，學會從不同的維度看待同一個維度，適當地運用估算或其他方法來判斷不同解題的可行性，這樣才能不斷提高自身多維解題能力。

鄭乃春
澳門大學附屬應用學校中學數學組教師